

Вибродиагностика наличия поверхностных поперечных трещин в стержнях разного поперечного сечения при продольных колебаниях

В. В. Матвеев, Е. А. Онищенко, О. Е. Богинич

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Приведены результаты определения вибродиагностических показателей наличия различного вида дышащих поперечных трещин нормального отрыва в стержневых элементах прямоуглового и круглого поперечного сечения с различными граничными условиями при продольных колебаниях. В качестве таких показателей приняты относительные амплитуды второй гармоники в спектре колебаний при основном и супергармоническом резонансах первой собственной формы колебаний консольных стержней без массы и с массой на конце, а также стержней со свободными для продольных перемещений концами при силовом и кинематическом возбуждении колебаний. Для их определения используются рассмотренные ранее авторами аналитические и численные методы при изгибных колебаниях. В аналитическом решении вычисляется обусловленный дыханием трещины параметр нелинейности колебательной системы с использованием соответствующих значений коэффициентов интенсивности напряжений. Численное решение выполняется на базе восьмиузловых конечноэлементных моделей стержней с представлением дышащей трещины в виде математического разреза и решением контактной задачи по обеспечению непроникновения берегов трещины. Получены зависимости диагностических показателей от относительной глубины, местоположения трещины и места регистрации продольных перемещений. Диагностические показатели сравниваются со значением относительного изменения собственной частоты колебаний. Показано, что при основном резонансе численное решение подтверждает хорошо выраженный эффект локализации диагностических показателей в области трещины. Установлено, что вибродиагностические показатели при супергармоническом резонансе на два порядка выше, чем при основном резонансе, однако эффект их локализации вблизи трещины практически не проявляется. Некоторая локализация наблюдается для абсолютных значений амплитуд второй гармоники, и только для относительной продольной деформации имеет место весьма выраженный эффект. Полученные значения вибродиагностических показателей сравниваются с данными при изгибных колебаниях. Отмечается, что несмотря на более низкие в основном показатели при продольных колебаниях, их преимущество состоит в возможности диагностирования симметричных как поверхностных, так и внутренних дышащих трещин.

Ключевые слова: вибродиагностика, дышащая трещина, продольные колебания, основной и супергармонический резонансы.

Введение. Рассмотренные ранее вопросы вибродиагностики наличия поверхностных трещин в стержнях прямоуглового [1] и круглого [2, 3] поперечного сечения посвящены, как и в большинстве известных работ, анализу изгибных колебаний. Однако в литературных источниках определенное внимание уделяется и оценке вибродиагностических показателей наличия трещины при возбуждении продольных колебаний. При этом используются как наиболее известные и простые методы вибродиагностики, основанные на оценке изменения собственных частот колебаний [4–6], так и методы, базирующиеся на оценке обусловленных дыханием трещины нелинейных эффектов во временных и частотных характеристиках регистрируемых колебаний при основном резонансе [7, 8].

Так, в [7] исследуется консольный стержень прямоуглового поперечного сечения при возбуждении продольной осевой гармонической силой, приложенной к его

свободному концу, основного резонанса по одной из трех собственных форм колебаний. При аналитически-численном решении соответствующего дифференциального уравнения колебаний стержня трещина моделируется как ограничитель продольного перемещения его свободного конца, а в эксперименте используется алюминиевый стержень с выращенной посередине краевой трещиной без указания ее глубины. Исследование ограничивается качественной оценкой довольно общего характера наблюдаемого изменения во временной и частотной характеристиках регистрируемых в разных сечениях стержня продольных перемещений и деформаций.

В работе [8] с использованием разработанной в ABAQUS конечноэлементной (КЭ) модели исследовались продольные колебания консольного стержня также прямоугольного поперечного сечения с краевой дышащей трещиной разной глубины и местоположения. Возбуждения колебаний осуществлялись продольным гармоническим усилием, которое прикладывалось к свободному концу стержня с частотой, соответствующей первой собственной форме продольных колебаний стержня.

Основное внимание было уделено анализу уровня нелинейности, связанной с генерацией высших гармоник в частотном спектре ускорения, регистрируемого в разных местах вдоль стержня на его поверхности со стороны трещины. Уровень нелинейности оценивался по значению относительных амплитуд второй и третьей гармоник, т.е. нормированным по амплитуде основной, первой гармоники.

Так, результаты вычислений относительных амплитуд указанных гармоник в восьми сечениях консольного стержня для трех значений глубины и трех местоположений трещины по длине стержня показали весьма четкое увеличение относительной амплитуды второй гармоники вблизи трещины и независимость ее величины от уровня возбуждения и трения между поверхностями трещины. Также установлено, что результаты, полученные с использованием упрощенной модели трещины, основанной на билинейной упругости, хорошо согласуются с таковыми модели с дышащей трещиной.

Для проверки результатов численного моделирования была проведена серия экспериментальных исследований на консольном и свободно подвешенном алюминиевых образцах при разных глубине и местоположении трещины с оценкой нелинейности по более чувствительной амплитуде второй гармоники. Однако эффект локализации относительной амплитуды этой гармоники был выражен значительно слабее, чем в численном решении.

В данной работе с использованием представленных в [1, 2] аналитических и численных методов для случая изгибных колебаний основное внимание уделяется анализу уровня относительных амплитуд второй гармоники при основном и более выраженном его при супергармоническом резонансе порядка $1/2$ первой формы продольных колебаний стержней прямоугольного и круглого поперечного сечений с краевой трещиной и с различными граничными условиями. Наличие второй гармоники при основном резонансе и возможность возбуждения супергармонического резонанса определяются нелинейностью колебательной системы, обусловленной “дыханием” поверхностной трещины нормального отрыва.

Основной резонанс. При основном резонансе колебаний одномассовой системы с билинейной асимметрической характеристикой восстанавливающей силы, моделирующей упругое тело с дышащей трещиной при его колебаниях по какой-либо j -й собственной форме колебаний в предположении ее неизменности при открытии трещины, относительная амплитуда возникающей второй гармоники $\bar{A}_{2/j} = A_{2j}/A_{1j}$, как и относительное изменение собственной частоты $\Delta\bar{\omega}_j = (\omega_{Tj} - \omega_j)/\omega_j$ (ω_j – собственная частота j -й формы колебаний цельного тела, ω_{Tj} – собственная частота колебаний с дышащей трещиной), можно определить через параметр нелинейности колебательной системы α_j [1, 9]:

$$\bar{A}_{2/j} = \frac{2\alpha_j(1+0,6\alpha_j)}{9\pi} \approx \frac{2\alpha_j}{9\pi}; \quad \Delta\bar{\omega}_j = \frac{1-\sqrt{1-\alpha_j}}{1+\sqrt{1-\alpha_j}}. \quad (1)$$

Параметр α_j , що відповідає відносному зміні жорсткості системи при відкритті тріщини, зручно виразити через енергетичну характеристику пошкодження χ_j [1]:

$$\alpha_j = \frac{\chi_j}{1+\chi_j}. \quad (2)$$

Значення χ_j рівно відношенню приросту потенціальної енергії деформації тіла $\Delta\Pi_{Tj}$, обумовленого відкриттям тріщини і визначеного через коефіцієнт інтенсивності напруження (КИН) при розтягненні K_1 , до потенціальної енергії деформації по розглядаваній j -й формі коливань цілого тіла Π_j .

Для розглядаваних стержнів (рис. 1) при відомих значеннях K_1 по фронту тріщини при розтягненні і амплітудній функції продольних переміщень цілих стержнів $u_j(x)$ при резонансі їх j -ї форми продольних коливань характеристику χ_j аналогічно методу при вигібних коливаннях [1] можна визначити по залежності

$$\chi_j = \frac{\Delta\Pi_{Tj}}{\Pi_j} = \frac{2}{EE'F} \frac{\int\int_{(F_T)} K_1^2 dF_T}{\int_0^l \left(\frac{du_j}{dx}\right)^2 dx}, \quad (3)$$

де E – модуль пружості матеріалу стержня; $E' = E$ – при плоскому напруженому стані по фронту тріщини; $E' = E/(1-\mu^2)$ – при плоскій деформації; F – площа поперечного сечення стержня; F_T – площа тріщини; μ – коефіцієнт Пуассона.

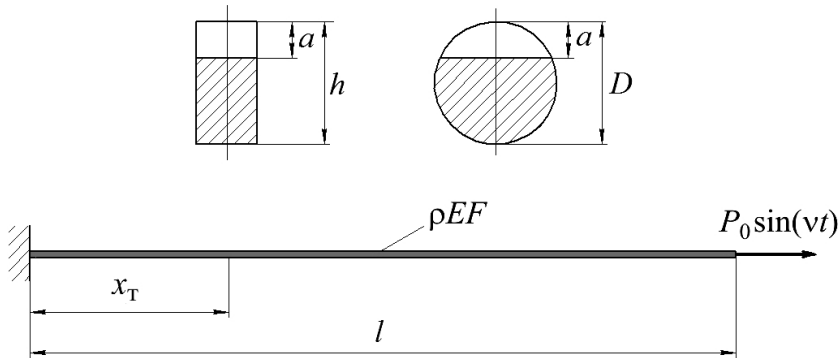


Рис. 1. Схема консольного стержня з тріщиною, навантаженого вимущою продольною силою.

Для стержня прямокутного поперечного сечення – полоси з краєвою тріщиною, розташованою в сеченні $x = x_T$, маємо [10]

$$K_1 = \frac{Q_j(x_T)\sqrt{\pi\gamma}}{bh^{1/2}} F_1(\gamma), \quad (4)$$

где $Q_j(x_T)$ – номинальное продольное усилие в сечении x_T стержня, равное $EF \left(\frac{\partial u_j}{\partial x} \right)_{x=x_T}$;

$$F_1(\gamma) = 1,12 - 0,231\gamma + 10,55\gamma^2 - 21,72\gamma^3 + 30,39\gamma^4, \quad \gamma = \frac{a}{h}.$$

В случае стержня круглого поперечного сечения с трещиной со строго прямолинейным фронтом [11] –

$$K_1 = \frac{4Q_j(x_T)\sqrt{\pi\gamma}}{\pi D^{3/2}} F_1(\gamma, \bar{z}), \tag{5}$$

где

$$F_1\left(\gamma, \frac{z}{z_C}\right) = \sum_{m=0}^7 \sum_{n=0}^2 N_{mn}(\gamma)^m (\bar{z})^n; \quad \gamma = \frac{a}{D}; \quad \bar{z} = \frac{z}{z_C}; \quad z_C = \sqrt{a(D-a)}.$$

Значения коэффициентов N_{mn} определяются по данным таблицы в случае консольного стержня и стержня со свободными для продольных перемещений концами [11].

Значения коэффициентов N_{mn} для консольного (над чертой) и свободного (под чертой) стержней

m	n		
	0	1	2
0	<u>0,22</u> 1,095	<u>0,123</u> 0,113	<u>0,409</u> -0,896
1	<u>28,513</u> -1,336	<u>0,511</u> 1,824	<u>-9,764</u> 3,092
2	<u>-354,782</u> 13,108	<u>-2,034</u> -21,709	<u>128,817</u> -4,197
3	<u>2178,632</u> -43,689	<u>-19,569</u> 105,483	<u>-727,078</u> -13,255
4	<u>-7140,202</u> 134,868	<u>144,435</u> -271,225	<u>2201,067</u> 51,548
5	<u>12957,447</u> -242,653	<u>-359,284</u> 387,47	<u>-3732,813</u> -59,329
6	<u>-1222,7</u> 254,093	<u>393,518</u> -290,024	<u>3343,521</u> 13,481
7	<u>4721,868</u> -108,196	<u>-159,206</u> 88,387	<u>-1240,214</u> 10,854

Следует заметить некоторую положительную особенность исследования продольных колебаний стержней круглого поперечного сечения при возможной неопре-

деленности положения трещины усталости по окружности поперечного сечения, например, в случае повреждения вращающегося стержня, что затрудняет проведение более чувствительной вибродіагностики при изгибных колебаниях. Исследование продольных колебаний дает возможность установить наличие трещины вне зависимости от ее положения.

С помощью выражений (4) и (5) определим характеристику (3) для стержня прямоугольного поперечного сечения по аналогии с (7) [1], учитывая, что при основном резонансе $u_{i \neq j} = 0$:

$$\chi_j = 2\pi h \int_0^{a/h} \gamma (F_1(\gamma))^2 d\gamma \Theta_j(x_T), \quad (6)$$

а для стержня круглого поперечного сечения – по аналогии с (21) [3]

$$\chi_j = 16D(1-\mu^2) \int_0^{a/D} \int_0^1 \gamma \sqrt{\gamma(1-\gamma)} (F_1(\gamma, \bar{z}))^2 d\gamma d\bar{z} \Theta_j(x_T), \quad (7)$$

где

$$\Theta_j(x_T) = \frac{\left(\frac{du_j}{dx}\right)_{x=x_T}^2}{\int_0^l \left(\frac{du_j}{dx}\right)^2 dx}. \quad (8)$$

При резонансе j -й собственной формы колебаний неповрежденного стержня амплитудная функция его продольных перемещений $u_j(x) = \text{const} \cdot U_j(x)$, где $U_j(x) = \sin \frac{(2j-1)\pi}{2l} x$ – собственная форма для консольного стержня, $U_j(x) = \cos \frac{j\pi}{l} x$ – для стержня со свободными концами, $U_j(x) = \sin k_i l \frac{x}{l}$ – для консольного стержня с массой M на свободном конце ($k_i l$ – корни частотного уравнения $k_i l \operatorname{tg} k_i l = \frac{\rho Fl}{M}$; ρ – плотность материала).

Следует заметить, что при основном резонансе значения χ_j , а следовательно, α_j , а также вибродіагностического показателя $\bar{A}_{2/j}$ не зависят ни от уровня и места приложения возбуждающего усилия, ни от демпфирующей способности колебательной системы.

На рис. 2 для стержней с соотношением $\frac{h}{l} = \frac{D}{l} = \frac{0,02}{0,23}$ с использованием (1), (2),

(6)–(8) приведены расчетные значения относительной амплитуды перемещений второй гармоники $\bar{A}_{2/1}$ и относительного изменения собственной частоты $\Delta\bar{\omega}_1$ первой ($j=1$) собственной формы колебаний для разных граничных условий, относительных глубин γ и местоположения x_T трещины.

Как видно, значение $\bar{A}_{2/1}$ в случае основного резонанса существенно зависит от γ , x_T и граничных условий, определяющих собственную форму колебаний, и значительно ниже относительного изменения собственной частоты $\Delta\bar{\omega}_1$. Однако обычно определяемые относительные амплитуды ускорений $\bar{A}_{2/1}^a = 4\bar{A}_{2/1}$ (на рис. 2 штриховые линии) практически соответствуют значению $\Delta\bar{\omega}_1$.

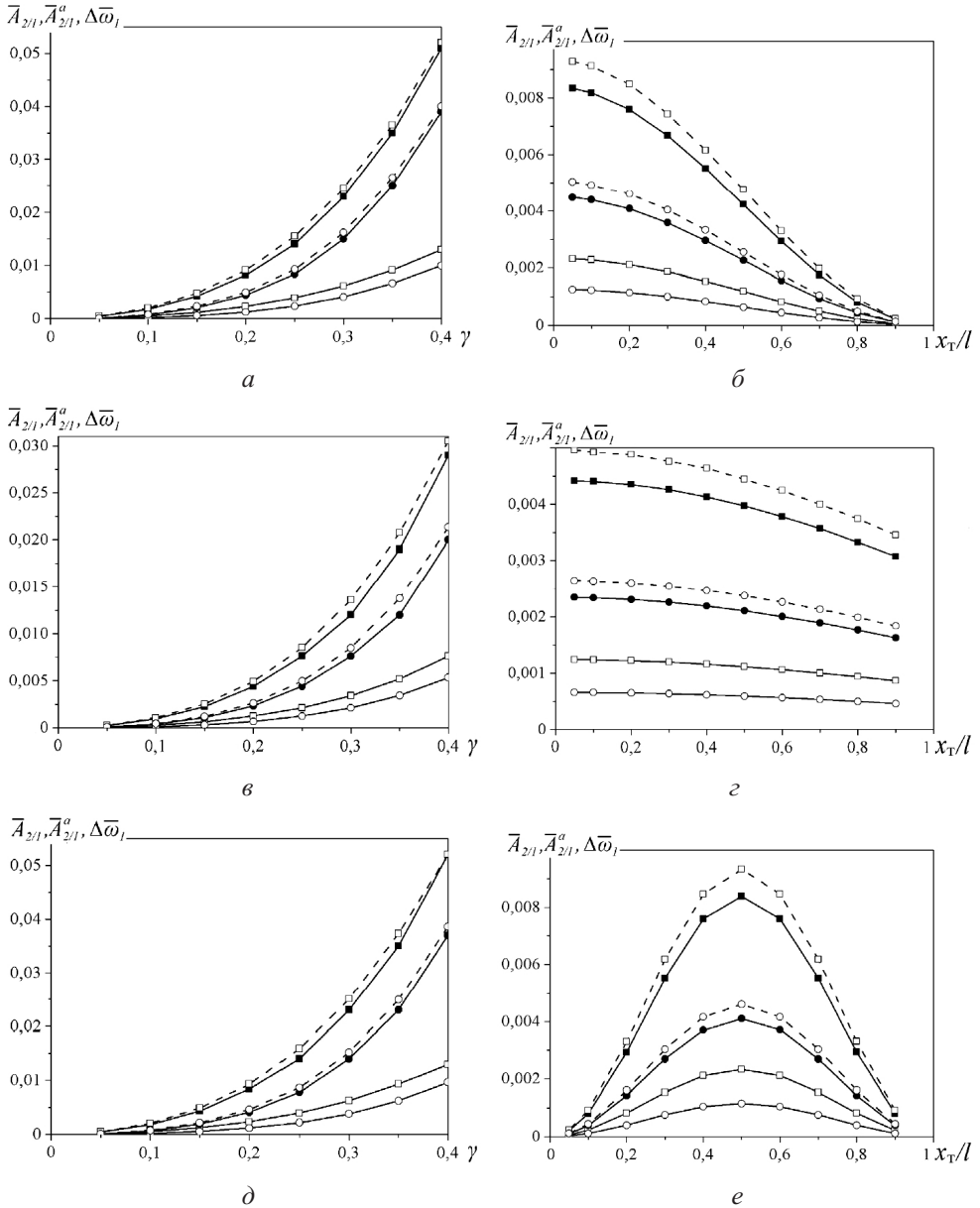


Рис. 2. Расчетные зависимости относительной амплитуды второй гармоники перемещений (сплошные линии) и ускорений (штриховые линии) $\bar{A}_{2/1}$, $\bar{A}_{2/1}^a$ (\square , \circ), а также относительного изменения собственной частоты $\Delta\bar{\omega}_1$ (\blacksquare , \bullet) от относительной глубины γ трещины при $x_T = 0, l$ (a, в) и $0,5l$ (д) и ее местоположения x_T при $\gamma = 0,2$ (б, з, е) в консольном стержне прямоугольного (\square , \blacksquare) и круглого (\circ , \bullet) поперечного сечения без массы (a, б), с массой на конце (в, з) и со свободными концами (д, е).

Вычисляемая по формуле (1) относительная амплитуда второй гармоники продольных перемещений при основном резонансе не зависит ни от места приложения возмущающей силы P , ни от места регистрации продольных перемещений сечений стержня, т.е. не отражает полученное в [8] ее изменение вдоль длины стержня и может соответствовать значению $\bar{A}_{2/1}$ вдали от трещины.

Для определения характера возможного изменения относительной амплитуды второй гармоники перемещений вдоль длины стержней рассмотрим их КЭ модели.

На рис. 3 приведены КЭ модели стержней прямоугольного ($b \times h = 0,004 \times 0,02$ м) и круглого ($D = 0,02$ м) поперечных сечений длиной $l = 0,23$ м, которые были построены в соответствии с методиками [2, 12] с помощью восьмиузловых конечных элементов. Механические характеристики стержней: модуль упругости $E = 200$ ГПа; плотность материала $\rho = 7800$ кг/м³; логарифмический декремент колебаний $\delta = 0,01$. Дышащая трещина относительной глубины $\gamma = 0,2$ представлена в виде математического разреза и расположена в сечении $x_T = 0,1l$. Взаимное непроникновение ее берегов обеспечивалось решением контактной задачи.

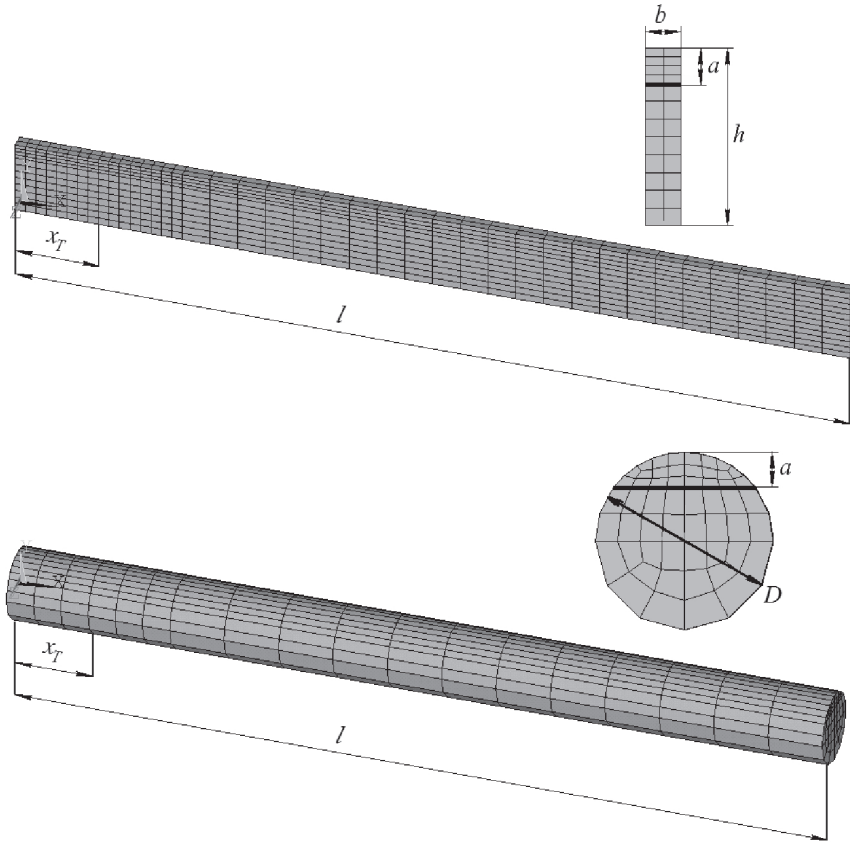


Рис. 3. Конечноэлементные модели исследуемых стержней.

Продольные колебания консольных стержней возбуждались сосредоточенной гармонической силой $P \sin vt$, приложенной к их свободному концу ($x_P = l$). Определение спектра амплитуд колебаний, а впоследствии и вибродиагностических показателей – относительных амплитуд ускорений второй гармоники $\bar{A}_{2/1}^a$ – осуществлялось с использованием метода Ньюмарка и FFT анализа.

Зависимость относительной амплитуды ускорений второй гармоники перемещений на верхней грани консольного стержня со стороны трещины от места регистрации ($x = x_0$) колебаний стержня прямоугольного поперечного сечения приведена на рис. 4. Там же представлены результаты [8], полученные для стержней ($b \times h \times l = 0,01 \times 0,025 \times 0,3$ м) с трещиной относительной глубины $\gamma = 0,16$ и $0,24$, которая расположена в сечении $x_T = 0,1667l$.

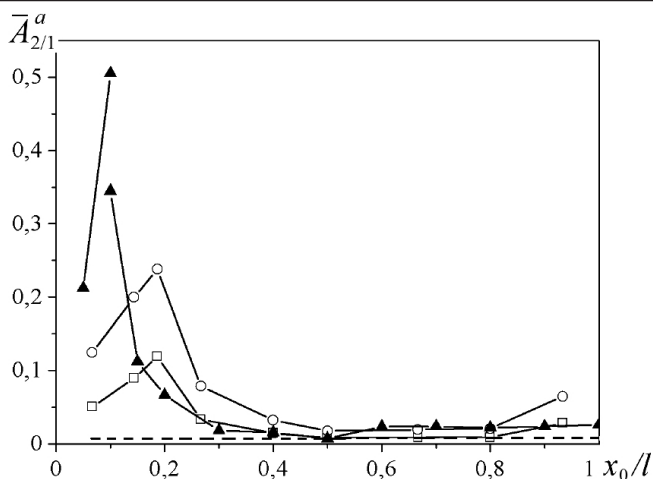


Рис. 4. Зависимость относительной амплитуды ускорений второй гармоники перемещений от места регистрации колебаний стержней прямоугольного поперечного сечения, полученная численно (▲), аналитически (штриховая линия) и по результатам работы [8] при $\gamma = 0,16$ (□) и $0,24$ (○).

Как видно, между зависимостями $\bar{A}_{2/1}^a(x_0)$ наблюдается согласование общего характера. Некоторое различие обусловлено разной относительной толщиной стержней и некоторым отличием в относительной глубине и местоположении трещины.

Для исследованных стержней перемещения определялись как на верхней грани, т.е. со стороны трещины, так и по нейтральной линии. Полученные зависимости $\bar{A}_{2/1}^a(x_0)$ для стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений свидетельствуют о хорошо выраженном эффекте локализации амплитуды ускорений поверхностных перемещений вблизи трещины и значительно меньшем эффекте по нейтральной линии поперечных сечений, особенно в случае стержня круглого поперечного сечения (рис. 5).

Как отмечалось выше, результаты экспериментального исследования зависимостей $\bar{A}_{2/1}^a(x_0)$ [8] в основном показали более слабое проявление эффекта локализации относительной амплитуды перемещений возле трещины и существенное различие между данными нескольких измерений. Более того, обнаружить трещину в консольных образцах оказалось возможным только при измерении вибрации вблизи их свободного возбуждаемого конца, так как данные измерения в других сечениях были близкими, а иногда и ниже, чем для неповрежденного образца, что могло быть обусловлено наличием в сигнале возбуждения паразитной второй гармоники и разным значением абсолютных амплитуд при различных измерениях. В то же время для свободно подвешенного образца с трещиной посередине данные измерения на одном конце оказались ниже, а на другом – незначительно выше, чем для неповрежденного образца. Таким образом, проблема экспериментального исследования, по-видимому, заключается в сложности осуществления строго гармонического возбуждения. Однако это предмет отдельного исследования.

Следует также отметить, что на отличие данных экспериментального исследования от численного решения влияние разной степени могли оказать проявления изгибных форм колебаний, которые сильно зависят от местоположения и глубины трещины.

Более чувствительными методами вибродиагностики дышащей трещины являются нелинейные эффекты при возбуждении супер-и субгармонических резонансов,

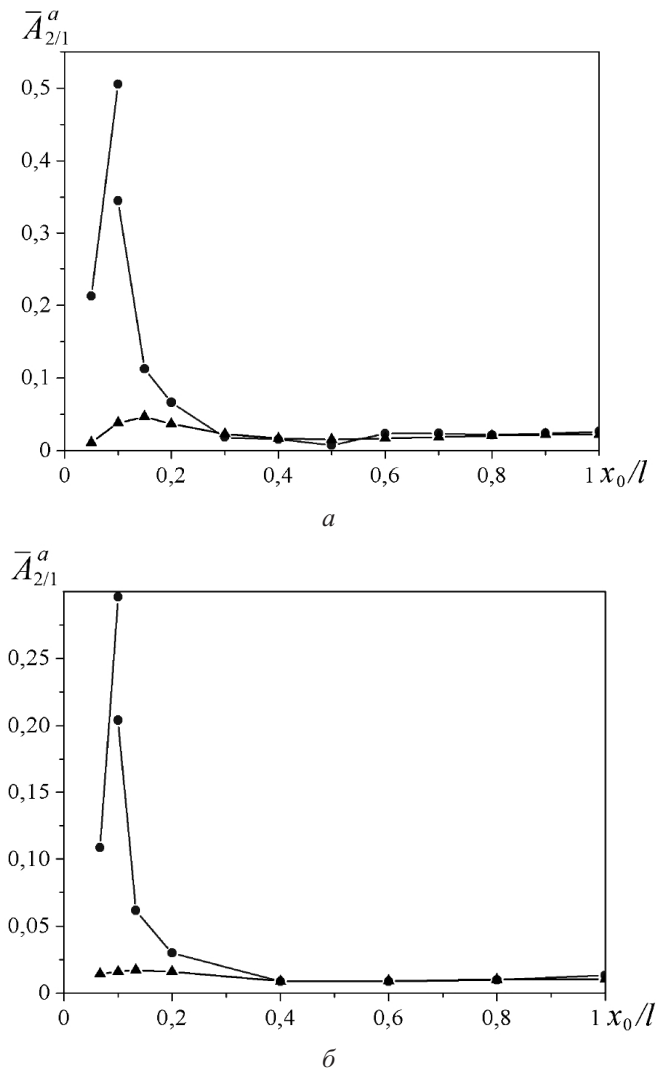


Рис. 5. Зависимость относительной амплитуды ускорений второй гармоники перемещений от места регистрации колебаний стержней прямоугольного (а) и круглого (б) поперечных сечений, полученная с использованием КЭ моделей для узлов на верхней грани (●) и на нейтральной линии (▲) стержня.

которые при изгибных колебаниях рассматривались многими исследователями, в частности авторами в работах [1–3]. Из-за чрезмерно высоких для практического использования частот субгармонического резонанса в случае продольных колебаний исследуемых стержневых элементов ограничимся результатами аналитического и численного, полученного с использованием представленных на рис. 3 КЭ моделей стержней, определения вибродиагностического показателя наличия трещины при супергармоническом резонансе.

Супергармонический резонанс. Вибродиагностическим показателем наличия в стержне дышащей трещины при указанном резонансе какой-либо j -й формы колебаний является, как и при изгибных колебаниях [1, 3], значение относительной амплитуды смещений резонирующей гармоники выбранного сечения стержня в спектре колебаний.

При супергармоническом резонансе порядка $1/2$ ($\nu = \frac{1}{2} \omega_{Tj}$) – это отношение амплитуд смещения второй, резонирующей гармоники к первой $\bar{A}_{2,j} = A_{2j}/A_{1\Sigma}$, которое, как и при основном резонансе, вычисляется через параметр нелинейности α_j (2), но при известном логарифмическом декременте колебаний δ_j системы, по полученным для случая относительно малых трещин формулам [1, 3]

$$\bar{A}_{2,j} \cong 0,58 \frac{\alpha_j}{\delta_j} \lambda_{1j} \quad \text{при } \bar{A}_{2,j} \leq 0,9 \quad \text{и} \quad \bar{A}_{2,j} \cong 0,725 \lambda_{1j} \sqrt{\frac{\alpha_j}{\delta_j}} \quad \text{при } \bar{A}_{2,j} > 0,9, \quad (9)$$

где коэффициент λ_{1j} определяется по результатам расчета амплитудных функций продольных перемещений $u_i(x)$ методом нормальных форм колебаний или главных координат вынужденных колебаний цельного стержня на частоте супергармонического резонанса j -й формы колебаний как отношение амплитуд перемещений по резонирующей форме и по сумме N первых форм колебаний в интересующем сечении стержня $x = x_0$ на частоте возбуждения ν :

$$\lambda_{1j} = u_{1j}(x_0) / \sum_{i=1}^N u_{1i}(x_0). \quad (10)$$

При известной демпфирующей способности колебательной системы, т.е. значении δ_j , основная задача заключается в нахождении параметра α_j через энергетическую характеристику повреждения χ_j колебательной системы при ее деформировании не по одной изолированной j -й форме как при основном резонансе (6)–(8), а в составе остальных возбуждаемых форм колебаний на частоте соответствующего супергармонического резонанса.

Это обуславливает, как следует из [1], представление сомножителя $\Theta_j(x_T)$ в (6), (7) в виде

$$\Theta_j(x_T) = \frac{\left(\frac{du_j}{dx} \sum_{i=1}^N \frac{du_i}{dx} \right)_{x=x_T}}{\int_0^1 \left(\frac{du_j}{dx} \right)^2 dx}. \quad (11)$$

Амплитудные функции продольных перемещений неповрежденного стержня u_i при возбуждении колебаний продольной гармонической силой $P \sin \nu t$, приложенной в сечении с координатой x_P :

$$u_i(x) = \frac{2PU_i(x_P)U_i(x)}{\rho Fl \omega_i^2 \beta_i}, \quad (12)$$

при кинематическом возбуждении за счет гармонического перемещения $B \sin \nu t$ закрепленного конца консоли ($x = 0$):

$$u_i(x) = \frac{2B\nu^2}{l\omega_i^2} \frac{U_i(x) \int_0^l U_i(x) dx}{\beta_i} \quad (13)$$

и при возбуждении колебаний консоли продольной гармонической силой $P \sin vt$, приложенной к сосредоточенной массе M на свободном конце стержня:

$$u_i(x) = \frac{PU_i(l)U_i(x)}{\left(\frac{1}{2}\rho Fl + M \sin^2 k_i l\right)\omega_i^2 \beta_i}, \quad (14)$$

где $\beta_i = 1 - (\nu/\omega_i)^2$; $\nu \cong 0,5\omega_j$; $U_i(x)$, ω_i – i -я собственная форма и собственная частота продольных колебаний стержня ($\omega_i = k_i \sqrt{E/\rho}$). Для консольного стержня $k_i = [(2i-1)\pi]/2l$, для свободно опертого $k_i = i\pi/l$, для консольного с массой M на конце k_i определяется из вышеприведенного частотного уравнения. В представленных ниже примерах расчета принято отношение $\rho Fl/M = 0,5$.

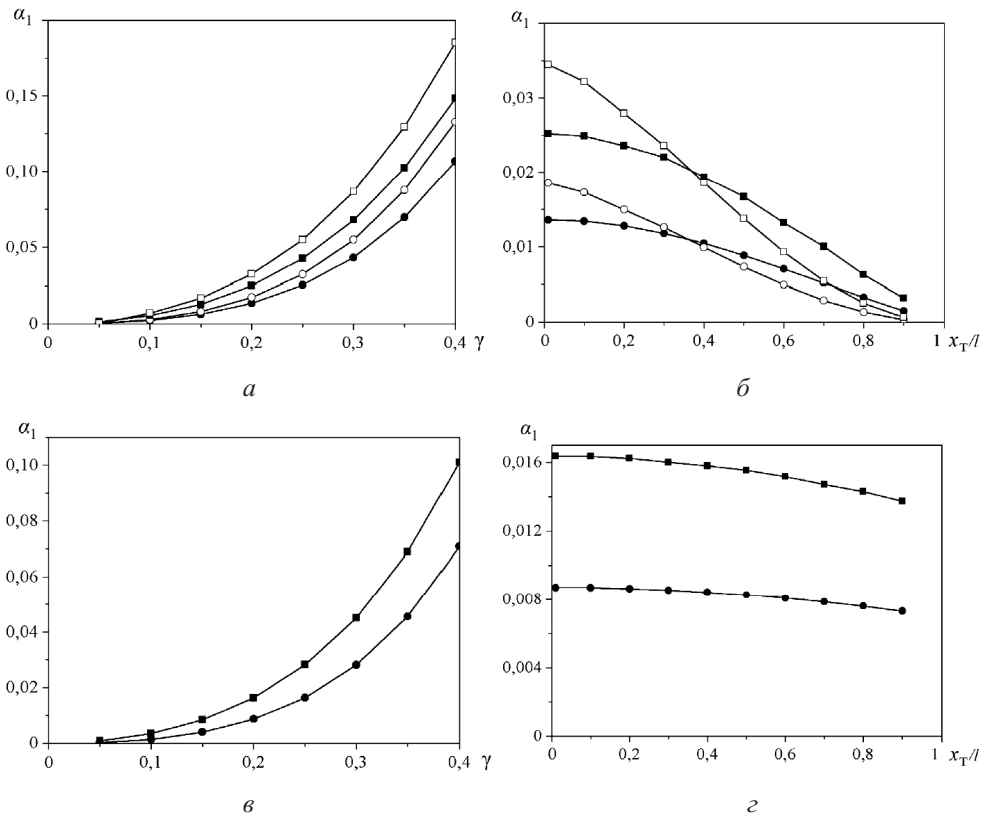


Рис. 6. Зависимость параметра нелинейности α_1 от относительной глубины трещины γ (а, в), расположенной в сечении $x_T = 0,1l$, и ее местоположения (б, г) при относительной глубине $\gamma = 0,2$ в случаях возбуждения колебаний силой $P \sin vt$ (темные точки), приложенной к свободному концу стержня ($x_p = l$), и перемещения заделки $B \sin vt$ (светлые точки) для консольных стержней без массы (а, б) и с массой на конце (в, г) прямоугольного (■, □) и круглого (●, ○) поперечных сечений.

На рис. 6 показаны полученные с использованием формул (2), (6), (7) и (11)–(14) зависимости параметра нелинейности α_j для консольного стержня прямоугольного и круглого поперечных сечений от относительной глубины трещины γ , расположенной в сечении $x_T = 0,1l$, и местоположения трещины x_T относительной глубины

$\gamma = 0,2$ в случаях возбуждения супергармонического резонанса первой собственной формы колебаний ($j = 1$) силой $P \sin vt$, приложенной к свободному концу стержня ($x_p = l$), и перемещения заделки $B \sin vt$.

В качестве примера на рис. 7 сплошными линиями представлены аналитические зависимости $\bar{A}_{2,1}^a$ от относительной глубины γ и местоположения трещины x_T для консольного стержня разного поперечного сечения при различных видах возбуждения колебаний и их регистрации в сечении $x_0 = l$. Характер этих зависимостей соответствует рассмотренным выше зависимостям параметра нелинейности α_1 (рис. 6) и существенно зависит от граничных условий закрепления стержня (рис. 8). На рис. 7 темными точками показаны соответствующие значения $\bar{A}_{2,1}^a$, полученные по результатам численного решения для узлов на верхней грани. Как видно, данные численного решения значительно отличаются от аналитического решения. Ранее [3] отмечались возможные причины этого: неучет при аналитическом решении изменения формы колебаний стержней при открытии трещины и отличие значения КИН в трещине, определяемого по известным справочным данным [10, 11] и фактически отражаемого в используемых КЭ моделях.

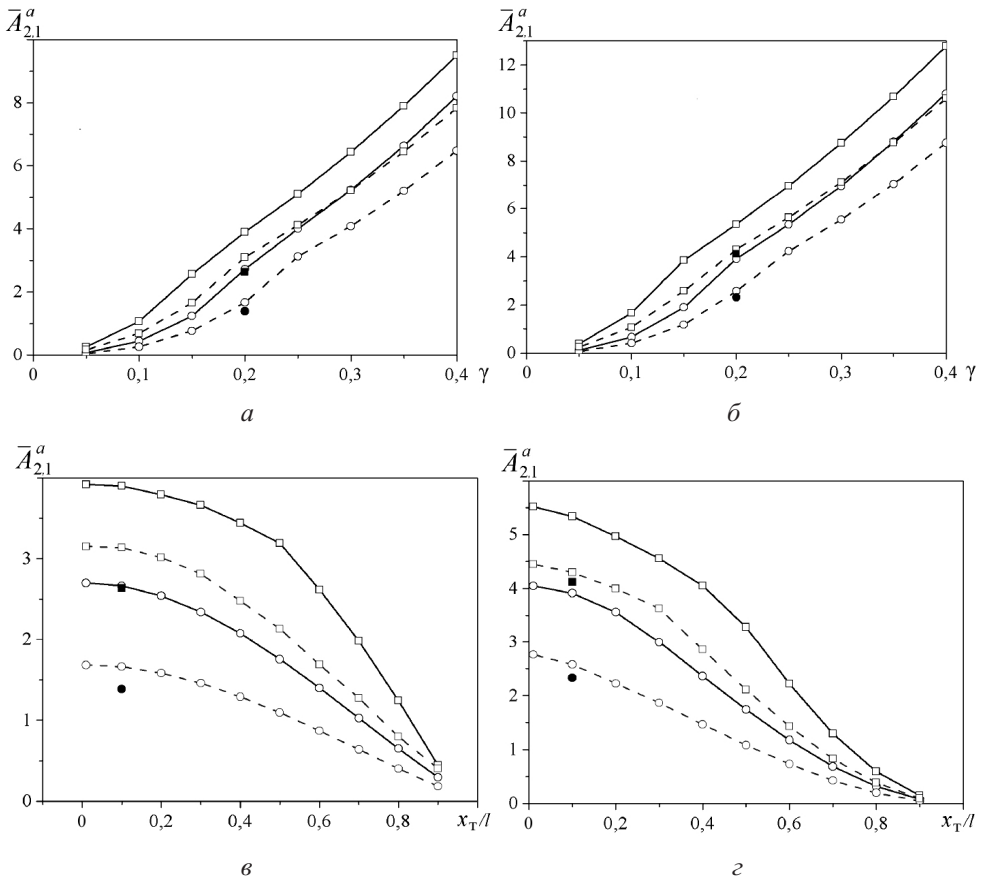


Рис. 7. Зависимость вибродиагностического показателя $\bar{A}_{2,1}^a$ от относительной глубины трещины γ (а, б), расположенной в сечении $x_T = 0, l$, и ее местоположения x_T (в, г) при относительной глубине $\gamma = 0,2$ в случаях возбуждения колебаний силой $P \sin vt$ (а, в) и перемещения заделки $B \sin vt$ (б, г) для стержней прямоугольного (\square , \blacksquare) и круглого (\circ , \bullet) поперечных сечений. (Темные точки – численное решение, штриховые линии – уточненное аналитическое.)

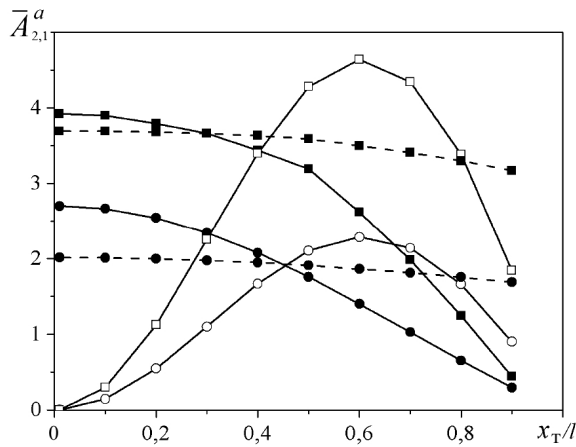


Рис. 8. Зависимость вибродіагностического показателя $\bar{A}_{2,1}^a$ от нормированного местоположения трещины x_T/l относительной глубины $\gamma = 0,2$ для стержней консольного закрепления (темные точки) без массы (сплошные линии), с массой на конце (штриховые линии) и со свободными концами (светлые точки) прямоугольного (\square, \blacksquare) и круглого (\circ, \bullet) поперечных сечений при возбуждении колебаний силой $P \sin \nu t$.

Так, для стержня прямоугольного поперечного сечения значения КИН, определяемые по величине раскрытия трещины в используемых КЭ моделях, оказались ниже справочных на 20%, для круглого – на 12,3%. Соответствующая корректировка аналитических зависимостей $\bar{A}_{2,1}^a(x_T)$, показанная на рис. 7 штриховыми линиями, существенно уменьшает различие в результатах аналитического и численного решений.

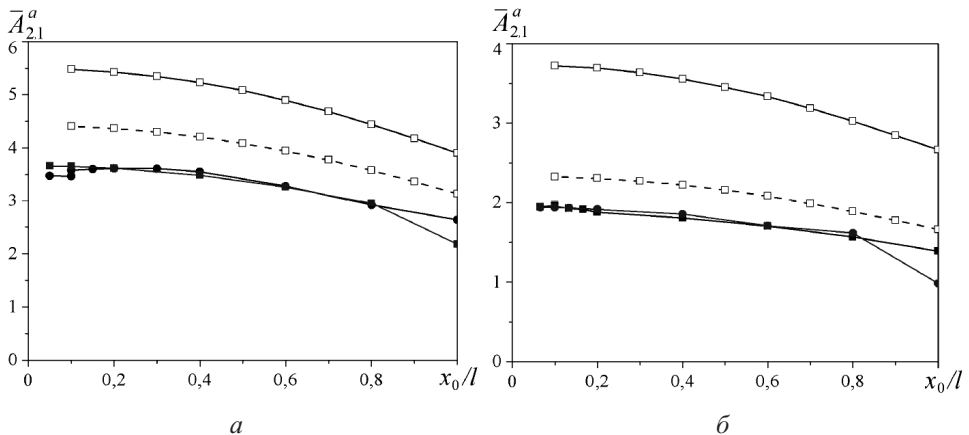


Рис. 9. Зависимость вибродіагностического показателя $\bar{A}_{2,1}^a$ от места регистрации x_0 продольных перемещений для консольных стержней прямоугольного (а) и круглого (б) поперечных сечений, полученная аналитически (\square) и численно для узлов на верхней грани (\blacksquare) и на нейтральной линии (\bullet). (Штриховые линии – уточненное аналитическое решение.)

По аналогии с рассмотрением основного резонанса были определены также зависимости $\bar{A}_{2,1}^a$ для узлов на верхней грани от места регистрации x_0 продольных перемещений и соответствующих им ускорений для случая $\gamma = 0,2, x_T = 0,1l$ (рис. 9).

Как и на рис. 7, уточненные аналитические зависимости на рис. 9 выделены штриховыми линиями. Следует подчеркнуть существенное отличие указанных зависимостей от аналогичных в случае основного резонанса. Как видно, при супергармоническом резонансе не наблюдается увеличения значения $\bar{A}_{2,1}^a$ по мере приближения места регистрации перемещений к трещине, т.е. отсутствует выраженный эффект локализации, и характер зависимостей $\bar{A}_{2,1}^a(x_0)$, полученных аналитически и численно, практически одинаков.

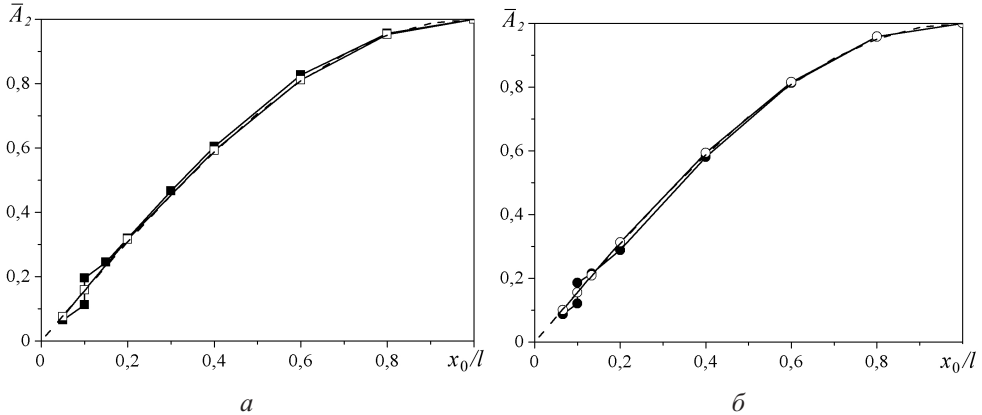


Рис. 10. Зависимость нормированных амплитуд второй гармоники продольных перемещений \bar{A}_2 от места регистрации перемещений x_0 для стержней прямоугольного (а) и круглого (б) поперечных сечений, полученная для узлов на верхней грани (темные точки), на нейтральной линии (светлые точки) и по результатам аналитического решения (штриховые линии).

Однако характер зависимости абсолютной величины амплитуды второй гармоники продольных перемещений A_2 на верхней грани от места их регистрации несколько нарушается в местоположении трещины. На рис. 10 для консольных стержней приведена зависимость нормированного значения $\bar{A}_2(x_0) = A_2(x_0)/A_2(l)$ от места регистрации x_0 . Значение \bar{A}_2 определялось по данным численного решения для узлов на верхней грани и на нейтральной линии, а также аналитического решения при $A_2 = \bar{A}_{2,1}(A_1 \equiv \sum_{i=1}^N u_i)$:

$$\bar{A}_2(x_0) = \sin \frac{\pi}{2l} x_0. \tag{15}$$

Естественно, что наиболее выраженный эффект локализации вблизи трещины следует ожидать для относительной продольной деформации ϵ на верхней грани стержней. Так, зависимости половинного значения общего размаха за цикл (ϵ_{cp}), а также амплитуды первой (ϵ_1) и второй (ϵ_2) гармоник относительной деформации от места регистрации x_0 , полученные по результатам численного решения для узлов на верхней грани консольных стержней, свидетельствуют о ярко выраженном эффекте локализации (рис. 11).

Определяемые значения параметра нелинейности α_1 и соответственно вибродиагностического показателя $\bar{A}_{2,1}^a$ при продольных колебаниях в основном значительно ниже, чем при изгибных колебаниях. С целью сравнения на рис. 12 для консольного и свободно опертого стержней прямоугольного и круглого поперечных сечений при возбуждении колебаний сосредоточенной силой $P \sin vt$ показаны анали-

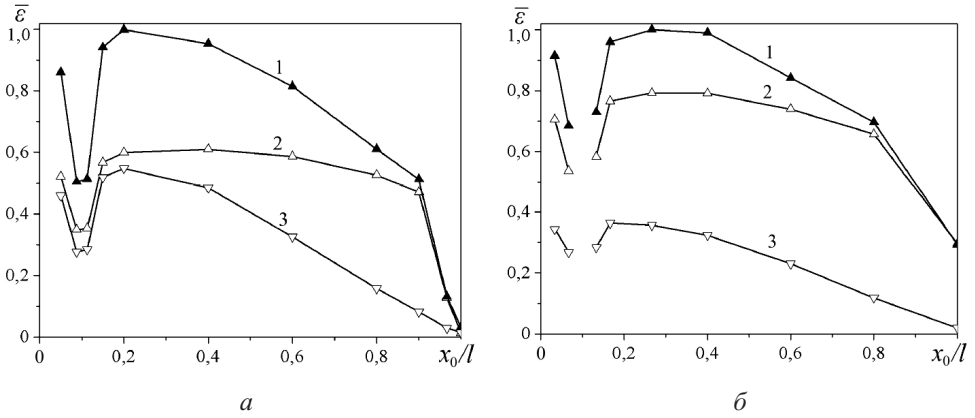


Рис. 11. Зависимость нормированных амплитуд относительных продольных деформаций $\bar{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_{\text{ср max}}$ от места регистрации перемещений x_0 для узлов на верхней грани консольных стержней прямоугольного (а) и круглого (б) поперечных сечений: 1 – $\varepsilon_{\text{ср}}/\varepsilon_{\text{ср max}}$; 2 – $\varepsilon_1/\varepsilon_{\text{ср max}}$; 3 – $\varepsilon_2/\varepsilon_{\text{ср max}}$.

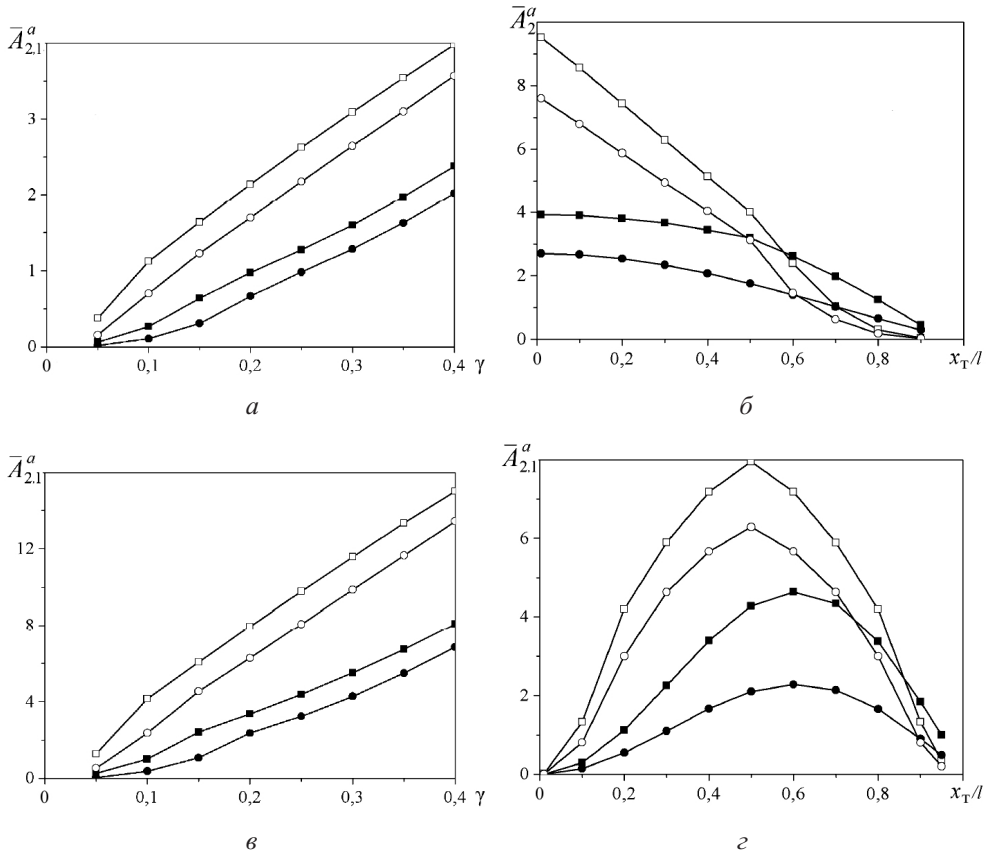


Рис. 12. Зависимость вибродіагностического показателя $\bar{A}_{2,1}^a$ от относительной глубины трещины γ (а, в), расположенной в сечении $x_T = 0,1l$, и ее местоположения x_T (б, з) при относительной глубине $\gamma = 0,2$ в случае возбуждения супергармонического резонанса первой продольной (темные точки) и изгибной (светлые точки) форм колебаний для стержней прямоугольного (■, □) и круглого (●, ○) поперечных сечений.

тические зависимости $\bar{A}_{21}^a(x_T)$ в случае продольных и изгибных колебаний, полученные по данным [1, 3]. При изгибных колебаниях консольного стержня гармоническая сила прикладывалась к свободному концу, свободно опертого – посередине. Расхождение в результатах определяется различием в значениях характеристики χ_1 и соответственно параметра α_1 , а также коэффициента λ_{11} , которые при неизменной величине δ зависят от собственной формы колебаний, места приложения вынуждающей силы и выбранного места регистрации колебаний.

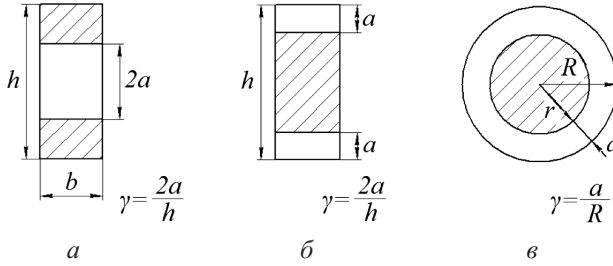


Рис. 13. Поперечные сечения стержней с центральной трещиной (а), двумя симметричными краевыми (б) и кольцевой (в).

Однако еще раз подчеркнем особенность вибродиагностического показателя \bar{A}_{21}^a при продольных колебаниях. Так, наличие в стержне прямоугольного поперечного сечения (полосе) центральной поперечной трещины или двух симметричных краевых трещин, как и наличие в стержне круглого поперечного сечения поверхностной кольцевой трещины (рис. 13), при изгибных колебаниях не обуславливает нелинейность колебательной системы, а только изменяет ее жесткость (параметр α на полувциклах колебаний разного знака имеет одно и то же значение) и, следовательно, невозможность возбуждения как супер-, так и субгармонического резонанса. В то же время при продольных колебаниях нелинейность, обусловленная указанными трещинами, четко определяется по (2), (3) при известных КИН [10]:

$$K_1 = \frac{Q(x_T)}{bh} \sqrt{\pi a} F_1(\gamma); \quad F_1(\gamma) = \sqrt{\sec\left(\frac{\gamma\pi}{2}\right)} \quad (16)$$

для центральной трещины,

$$K_1 = \frac{Q(x_T)}{bh} \sqrt{\pi a} F_1(\gamma); \quad F_1(\gamma) = \left(1 + 0,122 \cos^2 \frac{\pi\gamma}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi\gamma} \operatorname{tg} \frac{\pi\gamma}{2}} \quad (17)$$

для двух симметричных,

$$K_1 = \frac{Q(x_T)}{\pi r^2} \sqrt{\pi r} F_1(\beta), \quad \text{где } \beta = 1 - \gamma; \quad (18)$$

$$F_1(\beta) = 0,5(1 + 0,5\beta - 0,375\beta^2 - 0,363\beta^3 + 0,731\beta^4) \sqrt{\gamma}$$

для кольцевой.

Для сравнения на рис. 14 для всех вышерассмотренных видов трещин с одинаковой относительной глубиной $\gamma = 0,2$, расположенных в сечении $x_T = 0,1l$ консольного стержня, приведены расчетные зависимости $\bar{A}_{21}^a(\gamma)$ для случая возбуж-

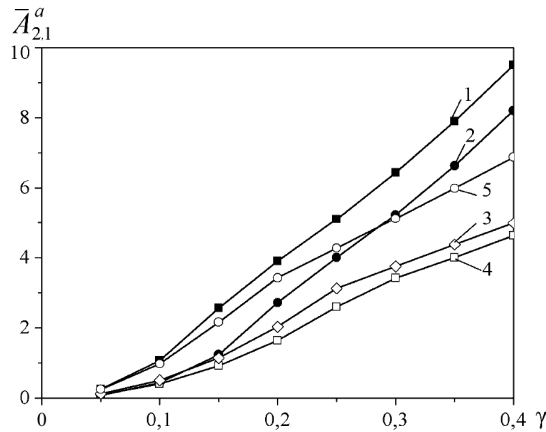


Рис. 14. Залежність вібродіагностичного показателя $\bar{A}_{2,1}^a$ від відносної глибини тріщини γ , розположеної в сеченні $x_T = 0,1l$, в случає возбуждення коливань силою $P \sin vt$ консольно закріплених стержней прямокутного (1, 3, 4) і круглого (2, 5) поперечних сечень з крайовою (1, 2), центральною (4), кільцевою (5) і двома симетричними (3) тріщинами.

дення супергармонічного резонанса сосредоточенной силой $P \sin vt$, приложенной в сечении $x_P = l$ при $\frac{h}{l} = \frac{D}{l} = \frac{0,02}{0,23}$.

Заключення. При основном резонансе какой-либо j -й собственной формы продольных колебаний стержней вибродіагностическим показателем наличия в них дышащей тріщини является проявление в спектре колебаний второй гармоники перемещений. Относительная амплитуда этой гармоники $\bar{A}_{2,1}$ не зависит ни от уровня возбуждения колебаний, ни от уровня демпфирующей способности колебательной системы. Однако при этом вдали от тріщини даже значение относительного ускорения $\bar{A}_{2,1}^a = 4\bar{A}_{2,1}$ мало, и результаты аналитического и численного решений практически совпадают и соответствуют относительному изменению собственной частоты колебаний.

Численное решение показывает, что на поверхности стержня со стороны расположения тріщини значения $\bar{A}_{2,1}^a$ существенно возрастают по мере приближения к ней, т.е. подтверждается возможность определения ее местоположения по хорошо выраженному эффекту локализации продольных перемещений.

При супергармоническом резонансе порядка $1/2$ вибродіагностическим показателем наличия дышащей тріщини является не зависящая от уровня возбуждения относительная амплитуда ускорения продольных перемещений, второй, резонирующей гармоники $\bar{A}_{2,j}^a$, для которой в случае $j = 1$ и данной демпфирующей способности системы установлена существенная зависимость от относительной глубины γ и местоположения тріщини x_T , а также места регистрации перемещений x_0 для консольного стержня без массы и с массой на конце и свободно опертого стержня прямокутного и круглого поперечных сечений. При значительной сосредоточенной массе значение $\bar{A}_{2,1}^a$ практически не зависит или слабо зависит от местоположения тріщини.

По сравнению с основным резонансом значения $\bar{A}_{2,1}^a$ примерно на два порядка выше $\bar{A}_{2,1}^a$, но для исследованных граничных условий они практически не зависят от места регистрации колебаний, т.е. отсутствует важный для определения местополо-

жения трещины эффект локализации. Однако абсолютные значения резонирующей гармоник проявляют эффект локализации вблизи трещины.

Несмотря на более низкие значения вибродиагностического показателя дышащей трещины при продольных колебаниях по сравнению с таковыми при изгибных, с их помощью можно диагностировать наличие симметрических как поверхностных, так и внутренних трещин.

Резюме

Приведено результати визначення вібродіагностичних показників наявності різного виду дихаючих поперечних тріщин нормального відриву в стрижневих елементах прямокутного і круглого поперечного перерізу з різними граничними умовами при поздовжніх коливаннях. За такі показники прийнято відносні амплітуди другої гармоніки в спектрі коливань при основному і супергармонічному резонансах першої власної форми коливань консольних стрижнів без маси і з масою на кінці, а також стрижнів із вільними для поздовжніх переміщень кінцями за силового і кінематичного збудження коливач. Для їх визначення використовуються розглянуті раніше авторами аналітичні та числові методи при згинальних коливаннях. В аналітичному рішенні обчислюється зумовлений диханням тріщини параметр нелінійності коливальної системи з використанням відповідних значень коефіцієнтів інтенсивності напружень. Числовий розв'язок виконується на базі восьмивузлових скінченноелементних моделей стрижнів із поданням дихаючої тріщини у вигляді математичного розрізу і розв'язанням контактної задачі по забезпеченню непроникнення берегів тріщини. Отримано залежності діагностичних показників від відносної глибини, місцеположення тріщини і місця реєстрації поздовжніх переміщень. Діагностичні показники порівнюються зі значенням відносної зміни власної частоти коливань. Показано, що при основному резонансі числовий розв'язок підтверджує добре виражений ефект локалізації діагностичних показників в області тріщини. Установлено, що вібродіагностичні показники при супергармонічному резонансі на два порядки вищі, ніж при основному резонансі, проте ефект їх локалізації поблизу тріщини практично не проявляється. Деяка локалізація спостерігається для абсолютних значень амплітуд другої гармоніки, і тільки для відносної поздовжньої деформації має місце дуже виражений ефект. Отримані значення вібродіагностичних показників порівнюються з даними при згинальних коливаннях. Відзначається, що незважаючи на більш низькі в основному показники при поздовжніх коливаннях, їх перевага полягає в можливості діагностування симетричних як поверхневих, так і внутрішніх дихаючих тріщин.

1. Матвеев В. В., Яковлев А. П., Богинич О. Е., Синенко Е. А. Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины в стержневых элементах при субгармоническом резонансе. *Пробл. прочности*. 2014. № 3. С. 21–37.
2. Матвеев В. В., Онищенко Е. А. Вибродиагностические параметры наличия полуэллиптической дышащей трещины в стержне круглого поперечного сечения при супер- и субгармоническом резонансах. *Пробл. прочности*. 2016. № 2. С. 5–19.
3. Матвеев В. В., Онищенко Е. А. Анализ вибродиагностических показателей наличия дышащей поверхностной трещины разной геометрии в стержне круглого поперечного сечения. *Пробл. прочности*. 2017. № 6. С. 5–20.
4. Hiwarkar V., Babitsky V. I., and Silberschmidt V. V. Damage assessment of a cracked bar: effect of material nonlinearity on vibro-impact response. *Key Eng. Mater.* 2009. 413–414. P. 237–244.

5. Sayyad F. B., Kumar B., and Khan S. A. Approximate analytical method for damage detection in free-free beam by measurement of axial vibrations. *Int. J. Damage Mech.* 2013. **22**, No. 1. P. 133–142.
6. Vardhan A. and Singh A. Non-destructive testing based method for crack detection in beams. *Eng. Solid Mech.* 2014. **2**, No. 3. P. 193–200.
7. Niwarkar V. R., Babitsky V. I., and Silberschmidt V. V. Crack as modulator, detector and amplifier in structural health monitoring. *J. Sound Vib.* 2012. **331**, No. 15. P. 3587–3598.
8. Broda D., Pieczonka L., Niwarkar V., et al. Generation of higher harmonics in longitudinal vibration of beams with breathing cracks. *J. Sound Vib.* 2016. **381**. P. 206–219.
9. Матвеев В. В., Богинич О. Е. К вопросу приближенного определения вибродиагностического параметра нелинейности упругого тела, обусловленной наличием дышащей трещины, при субгармоническом резонансе. *Пробл. прочности.* 2012. № 3. С. 37–49.
10. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2 т. Пер. с англ. под ред. Ю. Мураками. М.: Мир, 1990. Т. 1. 448 с.
11. Shin C. S. and Cai C. Q. Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending. *Int. J. Fracture.* 2004. **129**. P. 239–264.
12. Синенко Е. А., Зиньковский А. П. Влияние места приложения вынуждающей силы на амплитудный спектр изгибных колебаний стержня с дышащей трещиной. *Пробл. прочности.* 2015. № 4. С. 51–60.

Поступила 01. 06. 2018