

## **Ймовірнісна модель накопичення втомної пошкоджуваності в гумоподібних матеріалах**

**О. О. Ларін**

Національний технічний університет “Харківський політехнічний інститут”, Харків, Україна  
AlexeyA.Larin@gmail.com

*Представлено математичну модель процесу накопичення нелокалізованої втомної пошкоджуваності в гумоподібних матеріалах. Запропоновано співвідношення для визначення констант відповідного рівняння з урахуванням відомих характеристик кривої втоми, зокрема випадкового її розкиду. Отримано розрахункові співвідношення для визначення ймовірнісних характеристик пошкоджуваності. Розглянуто експериментальні дані щодо визначення реалізації процесу накопичення втоми в гумових зразках, які добре узгоджуються з теоретичними результатами.*

**Ключові слова:** втома, пошкоджуваність, гумоподібні матеріали, еластомір.

**Вступ.** У сучасних машинобудівних конструкціях широко використовують елементи, що виготовлені з гумоподібних матеріалів. Це можуть бути як допоміжні, ущільнюючі і т.п. елементи, так і самостійні основні елементи певних конструкцій. Прикладом останніх можуть слугувати спеціальні шланги, демпфірувальні прокладки, гумові пружинні вставки в приладах амортизації, пневматичні шини автомобілів [1–6] та ін. Зазначені об’єкти під час експлуатації зазнають суттєвого зовнішнього динамічного впливу. Змінна деформація з часом призводить до накопичення втоми в матеріалі і, як наслідок, до втрати несівної здатності відповідних конструктивних елементів. Таким чином, при оцінці надійності та міцності широкого класу елементів конструкцій з гумоподібних матеріалів актуальним є розробка моделей, що описують процеси накопичення втоми в цих елементах і у такий спосіб дають можливість прогнозувати їх ресурс.

Питанням оцінки характеристик опору втоми різних матеріалів приділяється багато уваги в літературних джерелах, зокрема прогнозування втомної довговічності у гумоподібних матеріалах [7–9]. Основною характеристикою опору втоми є експериментальна крива Велера, яка визначає залежність між амплітудами параметра напружено-деформованого стану (НДС) та числом циклів деформації, що витримає зразок до появи тріщини заданого розміру (або до руйнування). При цьому виникає проблема використання залежностей, отриманих при лабораторних дослідженнях в умовах, як правило, простого НДС, для оцінки втомної довговічності реальних елементів машинобудівних конструкцій, НДС яких під час експлуатації є складним динамічним. Для вирішення цієї проблеми використовують методи схематизації процесів та вводять еквівалентні характеристики НДС.

У даній роботі пропонується використовувати критерії зведення складного НДС до еквівалентних напружень [9, 10] та проводити оцінку опору втоми гумових матеріалів у рамках теорії континуальної механіки пошкоджуваності [11, 12]. Такий підхід дозволяє отримати математичну модель для опису процесу накопичення втомної пошкоджуваності, що, з одного боку, дає критерій для оцінки накопичення втоми при складному НДС, а, з другого – в перспективі дає можливість визначати накопичення втоми при змінних параметрах навантажень.

При проведенні аналізу процесу накопичення втоми вихідними експериментальними даними є крива Велера, що пов’язує амплітудні значення еквівалентного

параметра НДС (критерій, що використовується для оцінки міри накопичення пошкоджуваності), та число циклів до руйнування. Відомі експериментальні дані щодо залежностей числа циклів до руйнування від параметрів НДС вказують на те, що завжди існує досить суттєвий статистичний розкид при визначенні матеріальних констант [13–15]. Отже, при оцінці втомної довговічності реальних елементів машинобудівних конструкцій повинна враховуватись наявність відповідного розкиду.

Метою роботи є розробка ймовірнісної моделі накопичення втомної пошкоджуваності, що базується на континуальній механіці пошкоджуваності та враховує випадкову варіацію параметрів кривої втоми.

**Кінетика параметра пошкоджуваності.** Для оцінки процесу накопичення втоми використовується скалярний параметр пошкоджуваності  $D$ , який приймається за параметр стану матеріалу. Враховуючи це, нерівність Класіуса–Дугема, що виходить із другого принципу термодинаміки, призводить до введення асоційованої до пошкоджуваності змінної  $Y$  (швидкість вивільнення енергії деформації при пошкодженні) [9, 12, 16, 17] та до вимоги, що швидкість росту пошкоджуваності має бути невід’ємною:

$$Y = -\rho \frac{\partial \theta}{\partial D}; \quad Y \frac{dD}{dt} \geq 0, \quad (1)$$

де  $\theta$  – вільна енергія Гельмгольца;  $\rho$  – щільність матеріалу.

Не зупиняючись на подробицях теоретичних викладок термодинаміки процесу пошкоджуваності (деталі можна знайти в роботах [11, 12], відмітимо, що кінетику росту пошкоджуваності можна досить загально представити у вигляді ступеневого закону для асоційованої змінної  $Y$ :

$$\frac{dD}{dt} = B(-Y)^c. \quad (2)$$

Враховуючи, що розглядаються виключно процеси пружної деформації, а також обмежуючись припущенням, що зміною температури матеріалу в процесі деформування можна знехтувати, швидкість вивільнення енергії деформації при пошкодженні можна визначити через функцію щільності енергії деформації  $W$ :

$$Y = -\frac{\partial W}{\partial D}. \quad (3)$$

Функції щільності енергії деформації для багатьох матеріалів відомі та є функціями деформацій і напружень. Залежність функції щільності енергії деформації від параметра пошкоджуваності вводиться в рамках концепції ефективних напружень. Тобто приймається, що існуючі фізичні співвідношення для непошкодженого матеріалу зберігаються, але повинні бути виписані для ефективних значень НДС, які в даній роботі визначаються за Работновим–Качановим [11, 12, 16, 17]:

$$\tilde{S}_{ij} = \frac{S_{ij}}{1-D}, \quad (4)$$

де визначення ефективних напружень приведено для напружень 2-го тензора Піала–Кірхгоффа, що відповідає теорії пошкоджуваності для матеріалів зі скінченними деформаціями [12];  $S_{ij}$  та  $\tilde{S}_{ij}$  – компоненти умовного та ефективного 2-го тензора напружень Піала–Кірхгоффа.

Для гіперпружного матеріалу функція щільності енергії деформації визначається через інваріанти тензорів деформації або через головні подовження, які через наявність накопичення втоми матеріалу залежать від параметра пошкоджуваності:

$$Y = -\frac{\partial W}{\partial D} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial D}, \quad (5)$$

де  $\lambda_i$  – компоненти вектора головних подовжень.

Для визначення похідних від подовжень по параметру пошкоджуваності продиференціюємо безпосередньо ефективні напруження по параметру пошкоджуваності:

$$\frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial D} = \frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial D}, \quad \forall i = \overline{1, \dots, 3}, \quad (6)$$

де  $\tilde{S}_i$  – головні ефективні напруження 2-го тензора Піала–Кірхгофа.

Визначення ефективних напружень (4) може бути аналогічно сформульовано не тільки для компонентів, а й для головних значень тензорів напружень. У цьому випадку маємо

$$\frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial D} = \frac{\partial}{\partial D} \left( \frac{S_i}{1-D} \right) = \frac{S_i}{(1-D)^2} = \frac{\tilde{S}_i}{1-D}, \quad \forall i = \overline{1, \dots, 3}. \quad (7)$$

Прирівнюючи ліві частини виразів (6) та (7), отримасмо шукане співвідношення для похідних від головних подовжень по параметру пошкоджуваності:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial D} = \frac{\tilde{S}_i}{1-D} \left[ \frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial \lambda_i} \right]^{-1}, \quad \forall i = \overline{1, \dots, 3}. \quad (8)$$

Таким чином, (2) разом із (5) та (8) дозволяє отримати рівняння для кінетики накопичення втомної пошкоджуваності гіперпружних матеріалів при скінченних деформаціях:

$$\frac{dD}{dt} = B \left( \frac{S_{eq}}{1-D} \right)^c, \quad (9)$$

де для зручності введено позначення:

$$S_{eq} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \tilde{S}_i \left[ \frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial \lambda_i} \right]^{-1} = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \tilde{S}_i^2 \left[ \frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial \lambda_i} \right]^{-1}, \quad (10)$$

$S_{eq}$  – має розмірність напружень і може розглядатись як еквівалентні напруження, що дозволяють характеризувати накопичення втоми при складному НДС [9, 10].

Отримані еквівалентні напруження можуть бути представлені не тільки як вираз для головних напружень, а й як виражені через похідні функції щільності енергії деформацій, що у певних випадках може бути більш зручним:

$$\tilde{S}_i = \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}, \quad \frac{\partial \tilde{S}_i}{\partial \lambda_i} = -\frac{1}{\lambda_i^2} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} + \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i^2}, \quad \forall i = \overline{1, \dots, 3}; \quad (11)$$

$$S_{eq} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \right)^2 \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial \lambda_i^2} - \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} \right]^{-1}. \quad (12)$$

У роботі використовувалась модель Муні–Рівліна для нелінійної залежності напружень від деформацій, яка є однією з найбільш поширених, що застосовуються для дослідження процесів помірних деформацій гумових матеріалів у практиці інженерних розрахунків. Функція щільності енергії деформації для матеріалу за моделлю Муні–Рівліна має наступний вигляд:

$$W = C_{01}(\bar{I}_1 - 3) + C_{10}(\bar{I}_2 - 3) + \frac{k}{2}(J + 1)^2, \quad (13)$$

де  $C_{01}$ ,  $C_{10}$ ,  $k$  – константи матеріалу;  $\bar{I}_1$  та  $\bar{I}_2$  – приведені перший та другий інваріанти тензора деформації Гріна;  $J$  – визначник цього тензора, який є квадратним коренем з його третього інваріанта. Значення  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$  та  $J$  можуть бути визначені через головні подовження ( $\lambda_i$ ):

$$\bar{I}_1 = J^{-2/3}I_1; \quad I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2; \quad J = \lambda_1\lambda_2\lambda_3; \quad (14)$$

$$\bar{I}_2 = J^{-4/3}I_2; \quad I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2. \quad (15)$$

Провівши розрахунки похідних від функції щільності енергії деформації, отримаємо вираз для визначення еквівалентних напружень через інваріанти тензора деформації Гріна та головні подовження:

$$S_{eq} = \sum_{i=1}^3 \frac{(2C_{01}J^{2/3}[I_1 - 3\lambda_i^2] + 2C_{10}[3J^2\lambda_i^{-2} - I_2] - 3kJ^{7/3}[J - 1])^2}{J^{4/3}(8C_{01}J^{2/3}[2I_1 - 3\lambda_i^2] + 8C_{10}[6J^2\lambda_i^{-2} - I_2] + 9kJ^{7/3})}. \quad (16)$$

**Експериментальні випробування.** Отже, використання виразу (9) разом з еквівалентними напруженнями (12) дозволяє аналізувати процес накопичення втоми у гумових матеріалах, у тому числі при складному НДС.

Слід відмітити, що за помірних деформацій для визначення еквівалентних напружень можна використовувати вираз (16).

Об'єктом дослідження слугувала гума, що використовується в автомобільних шинах як матриця каркасу та брекера з параметрами:  $C_{01} = 0,1$  МПа;  $C_{10} = 0,8$  МПа;  $k = 160$  МПа, які задовільно описують поведінку даного матеріалу в стабілізованому стані в межах до 250% деформацій (граничні значення деформацій при розриві  $(610 \pm 25)\%$ ). Для визначення констант у рівнянні пошкоджуваності було проведено серію випробувань матеріалу на втому.

Плоскі зразки гуми навантажувались циклічно при розтязі. Із метою уникнення прояву ефекту втрати статичної стійкості деформування зразків проводилось без стиснення. Окрім того, експерименти на втомну довговічність проводились для стабілізованого матеріалу, тобто спочатку зразок зазнавав десять циклів деформації, після чого з нього знімалось повністю навантаження. Така попередня процедура дозволяла позбавитись впливу ефекту Маліна на подальші результати. Проводилось циклічне деформування при жорсткому навантаженні (здавались деформації) з різними амплітудами (50, 66, 75 та 100%) навколо фіксованого середнього значення (150%). Частота навантаження складала 5 Гц.

Результати експериментальних випробувань представлено на рис. 1 у подвійних логарифмічних координатах. На рис. 1,а приведено залежність амплітуд головних подовжень від числа циклів до руйнування зразка, на рис. 1,б – аналогічну залежність, побудовану для еквівалентних напружень, розрахованих за формулою (16), у припущенні одновісного НДС.

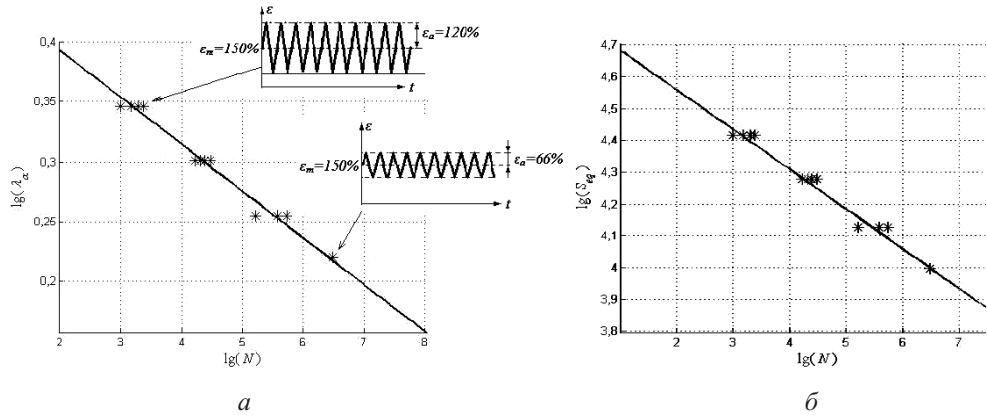


Рис. 1. Результати експериментальних випробувань на втому гумової суміші матриці каркасу пневматичних шин. (Точки – експериментальні дані, лінії – апроксимація методом найменших квадратів).

Видно, що експериментальні точки добре апроксимуються прямою лінією у подвійних логарифмічних координатах, тобто задовольняють рівняння Велера:

$$S_a^m N = C = S_c^m N_0 = \text{const}, \quad (17)$$

де  $N$  – число циклів до руйнування зразка при деформуванні з амплітудою  $S_a$ ;  $m$ ,  $C$  – константи апроксимації, причому остання може бути визначена як добуток базового числа циклів  $N_0$  до руйнування на фіксованому рівні амплітуд навантаження  $S_c$ . Апроксимацію проводили таким чином, що було зафіксовано базовий рівень амплітуд деформації  $S_c$  на рівні 50%, при цьому параметрами кривої Велера, що підлягають визначенню, вважались показник нахилу цієї кривої  $m$  та число циклів  $N_0$  до руйнування зразка.

Було отримано наступні параметри апроксимації:  $m_\lambda = 27$ ;  $N_{0\lambda} = 3 \cdot 10^6$  для залежності амплітуд подовжень від числа циклів до руйнування та  $m_{S_{eq}} = 8$ ,  $N_{0S_{eq}} = 5 \cdot 10^6$  для залежності амплітуд еквівалентних напружень від числа циклів до руйнування. Значення параметра  $m$  округлено до цілого числа. Проведені експерименти показують, що для кожного фіксованого рівня амплітуди навантаження число циклів до руйнування, визначене експериментально, має досить значний розкид у межах (25...30%) середнього значення.

Рівняння Велера (17) з визначеними константами можуть бути використані для ідентифікації параметрів рівняння при накопиченні втомної пошкоджуваності (9). Дійсно, формальний розв’язок рівняння (9) в умовах циклічного експерименту на втому дає можливість визначити число циклів до руйнування зразка при фіксованому рівні амплітуд певного навантаження шляхом його інтегрування та за умови, що параметр пошкоджуваності у момент руйнування сягає граничного значення (одиниці):

$$T_p : \|D = 1\| \quad \text{при} \quad S_{eq} = \text{const} \Rightarrow T_p = \frac{1}{BS_{eq}^c (c+1)}. \quad (18)$$

Аналогічно може бути визначено час до руйнування  $T_p$  зразка при фіксованих рівнях амплітуд навантаження з рівняння Велера (17):

$$T_p = \frac{N}{\omega_e} = \left( \frac{S_{eqc}}{S_{eq}} \right)^m \frac{N_0}{\omega_e}, \quad (19)$$

де  $\omega_e$  – частота циклів деформації зразка, в Гц.

Порівняння (18) із (19) за умови, що ці вирази повинні збігатись за будь-яких, але фіксованих значень  $S_{eq}$ , дозволяє виразити невідомі константи рівняння (9), що описує кінетику накопичення пошкоджуваності:

$$c = m; \quad B = \frac{\omega_e}{S_{eqc}^m N_0 (m+1)}. \quad (20)$$

**Ймовірнісне моделювання кінетики росту втомної пошкоджуваності.** Як зазначалось вище, експериментальні дані якісно добре задовольняють рівняння Велера, але значення числа циклів до руйнування мають досить значний розкид. Пропонується враховувати цей факт та розглядати процес накопичення втомної пошкоджуваності у ймовірнісній постановці. Для цього базове число циклів  $N_0$  до руйнування вважається випадковою величиною, що має задовольняти нормальному закону Гаусса із середнім значенням  $\langle N_0 \rangle$ , визначеним з апроксимаційної процедури, та коефіцієнтом варіації  $V_{N_0} = 0,1$ , згідно з яким число циклів до руйнування може варіюватись у межах 30% середнього значення.

Таким чином, процес накопичення пошкоджуваності при втомі гумових матеріалів, що розглядаються, описується диференціальним рівнянням (9), до якого входять константи, що визначаються з (20), а також випадковий параметр.

Нелінійність даного рівняння ускладнює можливість його безпосереднього усереднення з тим, аби визначити ймовірнісні характеристики пошкоджуваності. Для вирішення цієї проблеми пропонується ввести заміну, яка дозволяє лінеаризувати по параметру пошкоджуваності рівняння його кінетики. Введемо додаткову функцію  $U$ :

$$U(t) = [1 - (1 - D)^{m+1}] \frac{1}{m+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = (1 - D)^m \frac{dD}{dt}. \quad (21)$$

Таким чином, отримаємо лінійне диференціальне рівняння щодо введеної функції  $U(t)$  з випадковим параметром. Ймовірнісні характеристики процесу  $U(t)$  можуть бути досить легко визначені безпосереднім усередненням:

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\omega_e \chi^{-1}}{\langle N_0 \rangle (m+1)} \left( \frac{S_{eq}}{S_{eqc}} \right)^m. \quad (22)$$

Для зручності розрахунків констант пропонується представити випадкову складову базового числа циклів до руйнування через окремий параметр:

$$\chi = N_0 / \langle N_0 \rangle. \quad (23)$$

Даний параметр задовольняє нормальному закону Гаусса, має нормоване до одиниці математичне очікування, а його середньоквадратичне відхилення дорівнює коефіцієнту варіації  $V_{N_0}$ .

Отже, в рамках введених позначень та дослідження окремого випадку процесу накопичення втоми при фіксованих амплітудах еквівалентних напружень середнє значення процесу  $U(t)$  є лінійною функцією часу:

$$\langle U(t) \rangle = \left\langle \int_0^t \frac{\omega_e \chi^{-1}}{\langle N_0 \rangle (m+1)} \left( \frac{S_{eq}}{S_{eqc}} \right)^m dt \right\rangle = \psi \langle \chi^{-1} \rangle t = k_1 t, \quad (24)$$

де для скорочення запису введено позначення константи:

$$\psi = \frac{\omega_e}{\langle N_0 \rangle (m+1)} \left( \frac{S_{eq}}{S_{eqc}} \right)^m \quad (25)$$

та оператор усереднення випадкової величини:

$$\langle \chi^{-1} \rangle = \int_0^\infty \chi^{-1} f_\chi(\chi) d\chi = \int_0^\infty \chi^{-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi V_{N0}}} \exp \left[ -\frac{(\chi-1)^2}{2V_{N0}^2} \right] d\chi. \quad (26)$$

Аналогічно визначається дисперсія процесу  $U(t)$ :

$$\sigma_U^2(t) = \langle U^2(t) \rangle - \langle U(t) \rangle^2 = \psi^2 \langle \chi^{-2} \rangle t^2 - k_1^2 t^2 = k_2^2 t^2. \quad (27)$$

Враховуючи, що функція  $U(t)$  є адитивною та формально може бути представлена у вигляді суми випадкових величин (таке представлення можна отримати, якщо переписати рівняння (22) через інтегральну суму), із посиланням на центральну граничну теорему теорії ймовірностей можна застосувати гіпотезу, згідно з якою дана функція має задовольняти нормальному закону Гаусса (принаймні бути близькою до нього, особливо для значень часу, близьких до відмови, оскільки у цьому випадку в інтегральній сумі буде достатньо велика кількість членів ряду). Тому одновимірна функція щільності ймовірності процесу  $U(t)$  може бути представлена наступним виразом:

$$f_U(U, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi k_2 t}} \exp \left[ -\frac{(U - k_1 t)^2}{2k_2^2 t^2} \right]. \quad (28)$$

Виходячи з відомої функції щільності ймовірності процесу  $U(t)$ , можна визначити щільність ймовірності пошкоджуваності, враховуючи, що існує функціональний зв'язок між цими процесами (21):

$$f_D(D, t) = f_U \left( U = \frac{1}{m+1} [1 - (1-D)^{m+1}] \right) \left| \frac{dU}{dD} \right|; \quad (29)$$

$$f_D(D, t) = \frac{|(1-D)^m|}{\sqrt{2\pi k_2 t}} \exp \left[ -\frac{(1 - k_1(m+1)t - (1-D)^{m+1})^2}{2(m+1)^2 k_2^2 t^2} \right].$$

Співвідношення (29) дає можливість розрахувати процес накопичення пошкоджуваності при фіксованому рівні амплітуд навантаження у середньому ( $\langle D \rangle$ ), а також довірчий інтервал  $\Omega_D$  можливої варіації цього процесу із заданою ймовірністю ( $\gamma = 0,9995$ ):

$$\langle D(t) \rangle = \int_0^\infty D f_D(D, t) dD; \quad (30)$$



$$D_{\max}: \frac{\gamma}{2} = \int_0^{D_{\max}} f_D(D, t) dD; \quad D_{\min}: \gamma = \int_{D_{\min}}^{D_{\max}} f_D(D, t) dD. \quad (31)$$

Відповідно до формул (31) межі довірчого інтервалу розраховувались ітераційно для кожного значення часу  $t$ . Спочатку визначалась верхня межа шляхом серії розрахунків першого з інтегралів у формулі (31) доки його значення не досягне половини значення довірчої ймовірності. Наступним кроком була аналогічна процедура щодо визначення нижньої межі.

Безпосереднім інтегруванням щільності ймовірності пошкоджуваності в межах припустимих значень можна розрахувати ймовірність відмови ( $Q$ ) або ймовірність безвідмовної роботи ( $P$ ) (функція надійності). Останній параметр може бути визначений як ймовірність того, що пошкоджуваність у даний момент часу є меншою за критичне значення, тобто за одиницю:

$$P(t) = \Pr[D \in (0, 1)] = \int_0^1 f_D(D, t) dD = 1 - Q(t). \quad (32)$$

**Результати досліджень.** На рис. 2 приведено довірчі інтервали пошкоджуваності, які розраховано для різних рівнів амплітуд, та накладені на них залежності ймовірності безвідмовної роботи. Вісь абсцис представлено у логарифмічній шкалі, що дозволяє привести на одному графіку розраховані дані щодо ймовірності безвідмовної роботи та довірчого інтервалу пошкоджуваності для різних амплітуд деформацій. Як видно, залежності демонструють подібний характер.

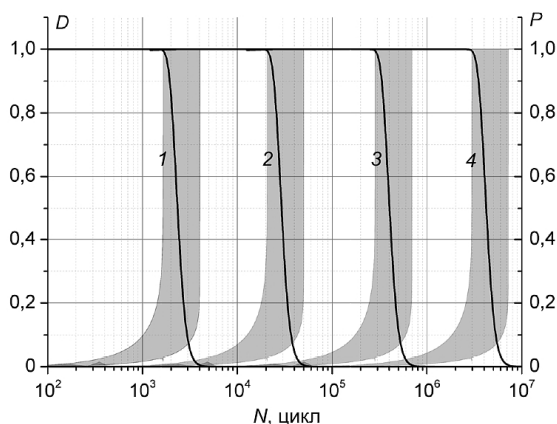


Рис. 2. Довірчий інтервал пошкоджуваності та ймовірність безвідмовної роботи зразків при амплітудах деформацій 50 (1), 66 (2), 75 (3) та 100% (4).

Отримані характеристики процесу з накопичення пошкоджуваності перевірялись експериментально. Для цього визначалась накопичена пошкоджуваність у часі при циклічному деформуванні декількох зразків. Так, частина експериментальних випробувань зразків до їх руйнування при циклічному деформуванні проводилось на сучасному вимірювальному комплексі, що складається з динамічної машини INSTRON/E3000 та синхронізованого з нею комп'ютера. Це дозволяло отримані дані автоматично фіксувати по кожному експерименту в реальному часі. Записувались значення прикладених амплітуд деформацій та вимірювані інженерні напруження (вимірювальна величина – зусилля).



На основі отриманих даних було побудовано залежність інженерних напружень від числа циклів, що витримав зразок. Аналіз залежностей показує, що напруження в зразках поступово спадає з ростом числа циклів деформації. Це може бути зумовлено накопиченням втомної пошкоджуваності в матеріалі. Дійсно, накопичення пошкоджуваності призводить до утворення в матеріалі мікрodefектів та мікротріщин, які його послаблюють, що за фіксованого рівня деформації зумовлює зменшення вимірюваного зусилля. Виникнення та розвиток великої кількості дефектів на поверхні гумових зразків у процесі їх циклічного деформування підтверджувалось візуально. На рис. 3 представлено фотографії одного й того ж зразка після відпрацювання приблизно 25 й 75% ресурсу та руйнування, отримані фотокамерою, що має високу роздільну здатність.

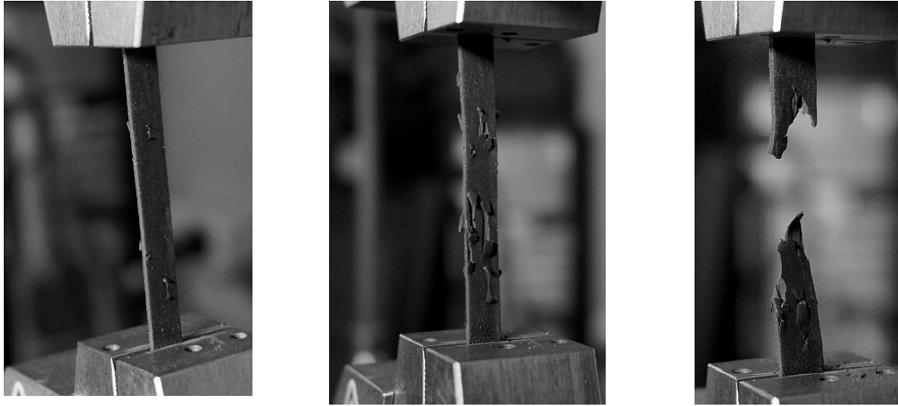


Рис. 3. Фотографії процесу зародження та розвитку мікрodefектів на поверхні зразків при циклічному деформуванні.

У роботі втомна пошкоджуваність вводиться у рамках концепції ефективних напружень. Отже, відношення зареєстрованого процесу зменшення напружень в експерименті до їх початкового значення (для матеріалу в стабілізованому стані) дозволяє отримати експериментальні криві реалізації процесу накопичення пошкоджуваності при циклічному деформуванні зразка:

$$D = 1 - \frac{\tilde{S}}{S}. \quad (33)$$

На рис. 4 представлено отримані експериментально реалізації процесу накопичення пошкоджуваності (криві), які нанесено на області довірчого інтервалу можливої варіації пошкоджуваності, що було розраховано теоретично. Слід відмітити, що більш вираженим цей процес є при невеликих рівнях амплітуд деформації (відносно гранично припустимих значень для цього матеріалу).

У рамках розглянутої теорії можна отримати також залежності щільності ймовірності руйнування, тобто закон розподілу ресурсу, гумового зразка при фіксованому рівні навантаження:

$$q(t) = \frac{dQ}{dt} = - \frac{dP}{dt}. \quad (34)$$

На рис. 5 представлено дану характеристику. Там же для наочності наведено графік середньої пошкоджуваності. Аналіз приведенного результату вказує на асиметрію розподілу ймовірності. Такий результат добре узгоджується з відомими даними,

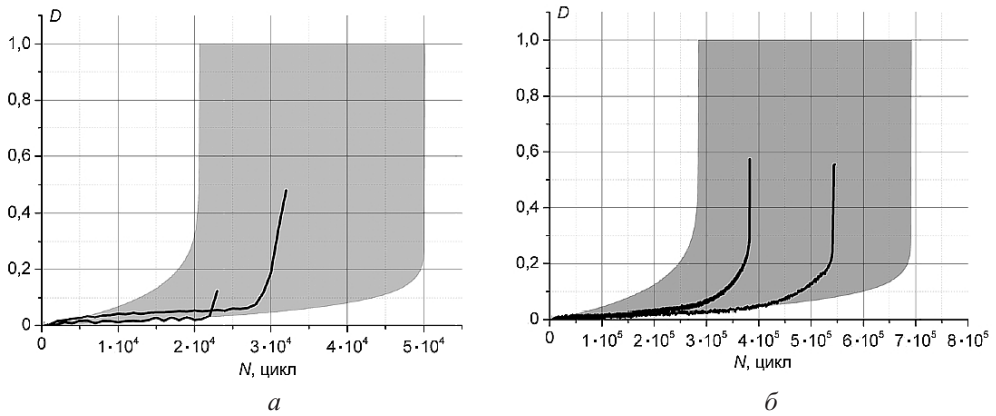


Рис. 4. Довірчий інтервал пошкоджуваності, розрахований теоретично, й експериментальні дані щодо реалізації процесу накопичення пошкоджуваності при амплітудах деформацій 75 (а) та 66% (б).

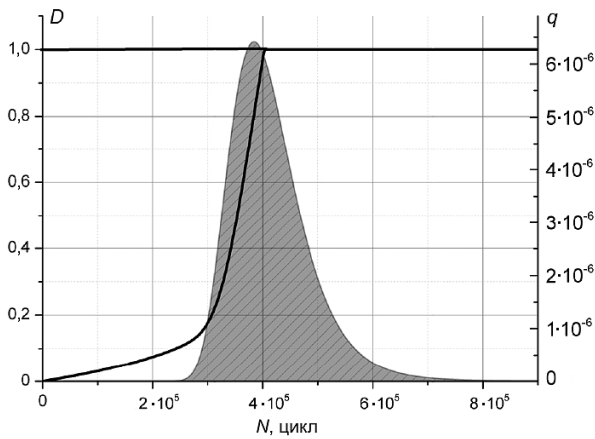


Рис. 5. Середня пошкоджуваність та щільність  $D$  ймовірності руйнування зразка  $q$  при амплітуді деформації 66%.

які свідчать, що втомний ресурс найкраще апроксимується логнормальним законом або законом Вейбулла, і якісно збігаються з наведеними на рис. 5.

## Висновки

1. Розглянуто ймовірнісне моделювання процесу накопичення нелокалізованої втомної пошкоджуваності в гумових матеріалах.
2. У рамках концепції ефективних напружень представлено кінетичне рівняння для опису процесу росту пошкоджуваності та запропоновано розрахункові співвідношення для визначення ймовірнісних характеристик його розв'язків (середнього значення, довірчого інтервалу пошкоджуваності), а також показників надійності.
3. Розглянуто експериментальні дані щодо визначення реалізації процесу накопичення втоми в гумових зразках, які добре узгоджуються з теоретичними.

## Резюме

Представлена математическая модель процесса накопления нелокализованной усталостной повреждаемости в резиноподобных материалах. Предложены соотношения для

определения констант данного уравнения с учетом известных характеристик кривой усталости, в частности случайного их разброса. Получены расчетные соотношения для определения вероятностных характеристик повреждаемости. Рассмотрены экспериментальные данные по определению реализации процесса накопления усталости в резиновых образцах, которые хорошо согласуются с теоретическими результатами.

1. *Noda N.-A., Kim B., Ota K., et al.* Effect of dimensions of crimped portion upon sealing performance of hydraulic brake hose by applying three-dimensional FEM analysis // *J. Solid Mech. Mater. Eng.* – 2013. – 7, No. 2. – P. 281–292.
2. *Luo Y., Liu Y., and Yin H. P.* Numerical investigation of nonlinear properties of a rubber absorber in rail fastening systems // *Int. J. Mech. Sci.* – 2013. – 69. – P. 107–113.
3. *Polukoshko S., Gonca V., and Svabs J.* Vibration damping using laminated elastomeric structures // *Solid State Phenomena.* – 2015. – 220-221. – P. 81–90.
4. *Suh J. B., Gent A. N., and Kelly S. G.* Shear of rubber tube springs // *Int. J. Non-Linear Mech.* – 2007. – 42, No. 9. – P. 1116–1126.
5. *Brinkmeier M., Nackenhorst U., and Ziefle M.* Finite element analysis of rolling tires a state of the art review // *Proc. of Int. CTI Conf. Automotive Tire Technology.* – Stuttgart, 2007. – No. 1994. – P. 1–10.
6. *Беспалова Е. И., Урусова Г. П.* Напряженное состояние многослойных оболочек вращения типа пневматических шин, контактирующих с жестким основанием // *Пробл. прочности.* – 2007. – № 3. – С. 75–86.
7. *Mars W. V. and Fatemi A.* A literature survey on fatigue analysis approaches for rubber // *Int. J. Fatigue.* – 2002. – 24, No. 9. – P. 949–961.
8. *Schubel P. M., Gdoutos E. E., and Daniel I. M.* Fatigue characterization of tire rubber // *Theor. Appl. Fract. Mech.* – 2004. – 42, No. 2. – P. 149–154.
9. *Ayoub G., Nait-Abdelaziz M., Zairi F., and Gloaguen J. M.* Multiaxial fatigue life prediction of rubber-like materials using the continuum damage mechanics approach // *Proc. Eng.* – 2010. – 2, No. 1. – P. 985–993.
10. *Ayoub G., Nait-Abdelaziz M., Zairi F., et al.* A continuum damage model for the high-cycle fatigue life prediction of styrene-butadiene rubber under multiaxial loading // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – 48, No. 18. – P. 2458–2466.
11. *Lemaitre J.* *Engineering Damage Mechanics.* – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2005. – 380 p.
12. *Murakami S.* *Continuum Damage Mechanics.* – Springer, 2012. – 402 p.
13. *Троценко В. Т., Коваль Ю. И., Митченко Е. И.* Рассеяние характеристик усталости сталей и его анализ с учетом циклических неупругих деформаций // *Пробл. прочности.* – 2007. – № 3. – С. 5–22.
14. *Sun Q., Dui H.-N., and Fan X.-L.* A statistically consistent fatigue damage model based on miner's rule // *Int. J. Fatigue.* – 2014. – 69. – P. 16–21.
15. *Zhao Y. X. and Liu H. B.* Weibull modeling of the probabilistic *S-N* curves for rolling contact fatigue // *Ibid.* – 2014. – 66. – P. 47–54.
16. *Бобир М. І., Грабовський А. П., Халімон О. П. та ін.* Кінетика розсіяного руйнування металевих конструкційних матеріалів при пружно-пластичному деформуванні // *Пробл. прочности.* – 2007. – № 3. – С. 23–34.
17. *Моваггар А., Львов Г. И.* Экспериментальное исследование усталостной прочности стекловолоконного композита СТЭФ-1 // *Там же.* – 2012. – № 2. – С. 145–155.

Поступила 22. 09. 2015