

## Численная методика определения эффективных механических характеристик однонаправленно армированного композита

С. Дария Заде<sup>1</sup>, Г. И. Львов<sup>2</sup>

Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”, Харьков, Украина

<sup>1</sup> s\_daryazadeh@yahoo.com

<sup>2</sup> lvovgi@list.ru

*Исследованы эффективные механические характеристики волокнистых композитов. Расчеты выполнены с помощью программного комплекса ANSYS. В результате численного исследования напряженного состояния репрезентативной ячейки определены эффективные упругие свойства однонаправленно армированного композита.*

**Ключевые слова:** ортотропная пластина, эффективные упругие свойства, численный анализ, граничные условия, композит.

**Введение.** Одна из важных задач механики композитов заключается в определении конечных свойств материала по известным характеристикам его компонентов. Композиционным материалом является неоднородный сплошной материал, состоящий из двух или более компонентов, среди которых можно выделить армирующие элементы, обеспечивающие необходимые механические характеристики материала, и матрицу (или связующее), которая обеспечивает совместную работу армирующих элементов. Композиционные материалы состоят из большого числа микроструктурных компонентов с разными характеристиками, сочетание которых определяет свойства материала в целом. Зная решение этой задачи, можно исследовать напряженно-деформированное состояние в макро- и микроскопических элементах структуры, формулировать критерии прочности и разрабатывать рекомендации по оптимальному выбору структуры и состава композита.

Теоретические исследования в этой области позволяют сократить до минимума проведение дорогостоящих экспериментов. Первые работы в области механики структурно-неоднородных сред были посвящены изучению эффективных механических характеристик микронеоднородных материалов по правилу механического смешивания [1, 2]. В 1946 г. И. М. Лифшиц и Л. Н. Розенцвейг [1] предложили рассчитывать макроскопические свойства поликристаллов, решая стохастическую краевую задачу. В исследованиях Хилла [3] и других для определения эффективных упругих свойств поликристаллов и композитных сред применяется метод само-согласования. Рассматривается напряженно-деформированное состояние единичного включения, помещенного в однородную матрицу композита с упругими свойствами. Этот математический метод моделирования был развит впоследствии в трудах основоположников современной механики композиционных материалов стохастической структуры В. А. Ломакина [2], Л. П. Хорошуна [4], Т. Д. Шермергора [5], Г. А. Ванина [6], М. Берана [7], Й. Й. Херманса [8] и многих других ученых. В монографии Г. А. Ванина обобщены результаты исследований, посвященных применению периодических функций комплексных переменных для решения задач прогнозирования эффективных свойств однонаправленных композитов и расчета полей деформирования. В современной микро-механике разработаны модели сред с периодической структурой.

**Методика численного эксперимента.** В исследуемой модели с достаточной точностью определяются характеристики и градиенты полей напряжений и деформаций, для чего строятся мелкие сетки дискретизации на современных ПК. Для корректного моделирования полей микронапряжений и микродеформаций, соответствующих условиям макронагружения, необходимо определить граничные условия для ячейки периодичности. Уже получены прогнозы эффективных упругих свойств, упругопластических или вязкоупругих характеристик, процессов деформирования и разрушения структурно-неоднородных материалов. Математические модели механики композитов, основанные на микромеханике, являются наиболее информативными [9–11].

В данной работе предполагаются идеальный контакт между компонентами композита и использование симметрии среды, что позволяет сформулировать краевую задачу для конечной области – ячейки периодичности.

Рассмотрим композиционный материал с однонаправленными волокнами, параллельными оси  $z$  (рис. 1).

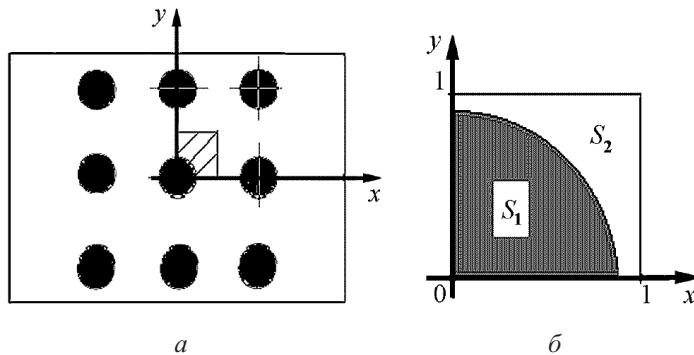


Рис. 1. Расчетная схема: *a* – поперечное сечение композиционного материала; *b* – репрезентативная ячейка.

В объемах, значительно превышающих радиус волокна, композит может рассматриваться как гомогенный ортотропный материал. Напряженно-деформированное состояние такого гомогенного материала характеризуется средними по объему  $V$  величинами

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV, \quad \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV. \quad (1)$$

В системе ортогональных декартовых координат, совпадающей с плоскостями симметрии гомогенного ортотропного материала, закон Гука имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \langle \sigma_x \rangle = b_{11} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{12} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{13} \langle \varepsilon_z \rangle; \\ \langle \sigma_y \rangle = b_{21} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{22} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{23} \langle \varepsilon_z \rangle; \\ \langle \sigma_z \rangle = b_{31} \langle \varepsilon_x \rangle + b_{32} \langle \varepsilon_y \rangle + b_{33} \langle \varepsilon_z \rangle; \\ \langle \tau_{xy} \rangle = b_{44} \langle \gamma_{xy} \rangle; \quad \langle \tau_{yz} \rangle = b_{55} \langle \gamma_{yz} \rangle; \quad \langle \tau_{zx} \rangle = b_{66} \langle \gamma_{zx} \rangle, \end{cases} \quad (2)$$

где  $b_{ij}$  – упругие постоянные эквивалентного гомогенного материала.

Матрица упругих постоянных является симметричной:  $b_{ij} = b_{ji}$ . Поскольку упругие свойства рассматриваемого композита одинаковы в направлениях  $x$  и  $y$ , имеют место равенства

$$b_{11} = b_{22}; \quad b_{13} = b_{23}; \quad b_{55} = b_{66}. \quad (3)$$

Цель настоящей работы заключается в определении этих характеристик по известным упругим свойствам волокон и связующего. Материал волокон и связующего предполагается изотропным.

Для численного исследования выделяется минимальная репрезентативная ячейка (рис. 1,б), границы которой являются линиями симметрии геометрической структуры композита.

**Результаты и их обсуждение.** Для нахождения эквивалентных упругих постоянных  $b_{ij}$  проанализируем напряженное состояние репрезентативной ячейки в плоскости  $xu$  и обобщенное плоское деформированное состояние с помощью программного комплекса ANSYS. Путем численных экспериментов моделируются четыре случая деформирования при одноосном растяжении в направлениях  $x$ ,  $y$  и сдвиге в плоскостях  $xu$ ,  $yz$ .

Первый численный эксперимент моделирует одноосное растяжение в направлении волокон (ось  $z$ ).

Для структурного анализа репрезентативной ячейки граничные условия, соответствующие этому виду деформирования композита, следующие. На границах области задаются условия симметрии относительно соответствующих линий. Величина продольной деформации принимается равной  $10^{-3}$ .

Средние значения компонентов тензора деформации при этом будут:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0. \quad (4)$$

Для численного анализа методом конечных элементов применен программный комплекс ANSYS, для моделирования – элемент SOLID182 с 20 узлами. Конечно-элементная модель имеет 5641 элемент (рис. 2) [11].

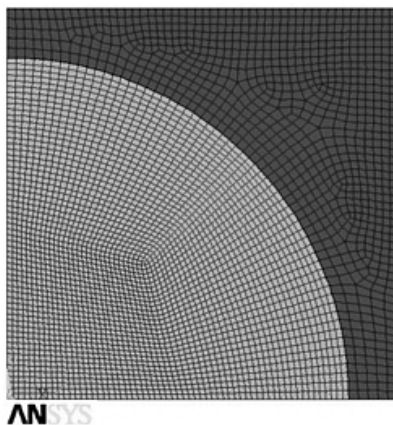


Рис. 2. Схема разбиения конструкции на конечные элементы.

Численные результаты получены для эпоксистеклопластика. Механические свойства матрицы типа эпоксидного полимера следующие:  $E_m = 4200$  МПа;  $G_m = 1500$  МПа;  $\nu_m = 0,4$ , волокна:  $E_f = 74800$  МПа;  $G_f = 31000$  МПа;  $\nu_f = 0,2$  [12].

Для композита с волокном постоянного радиуса  $0 < r < 1$  коэффициент объемного содержания определяется из соотношения  $\xi = \pi r^2 / 4$  (рис. 1). По завершении анализа в простпроцессоре вычислялись средние значения напряжений:

$$\langle \sigma_x \rangle = \int_0^1 \sigma_x(x=1, y) dy; \quad \langle \sigma_y \rangle = \int_0^1 \sigma_y(x, y=1) dx; \quad \langle \sigma_z \rangle = \int_0^1 \int_0^1 \sigma_z dx dy. \quad (5)$$

Результаты первого численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) три упругие характеристики эквивалентного материала:

$$b_{13} = \langle \sigma_x \rangle / \langle \varepsilon_z \rangle; \quad b_{23} = \langle \sigma_y \rangle / \langle \varepsilon_z \rangle; \quad b_{33} = \langle \sigma_z \rangle / \langle \varepsilon_z \rangle. \quad (6)$$

Численный анализ репрезентативной ячейки дает возможность исследовать ее напряженно-деформированное состояние и оценить локальную концентрацию напряжений. На рис. 3 представлены такие результаты для первого численного эксперимента при  $\xi = 0,488$ .

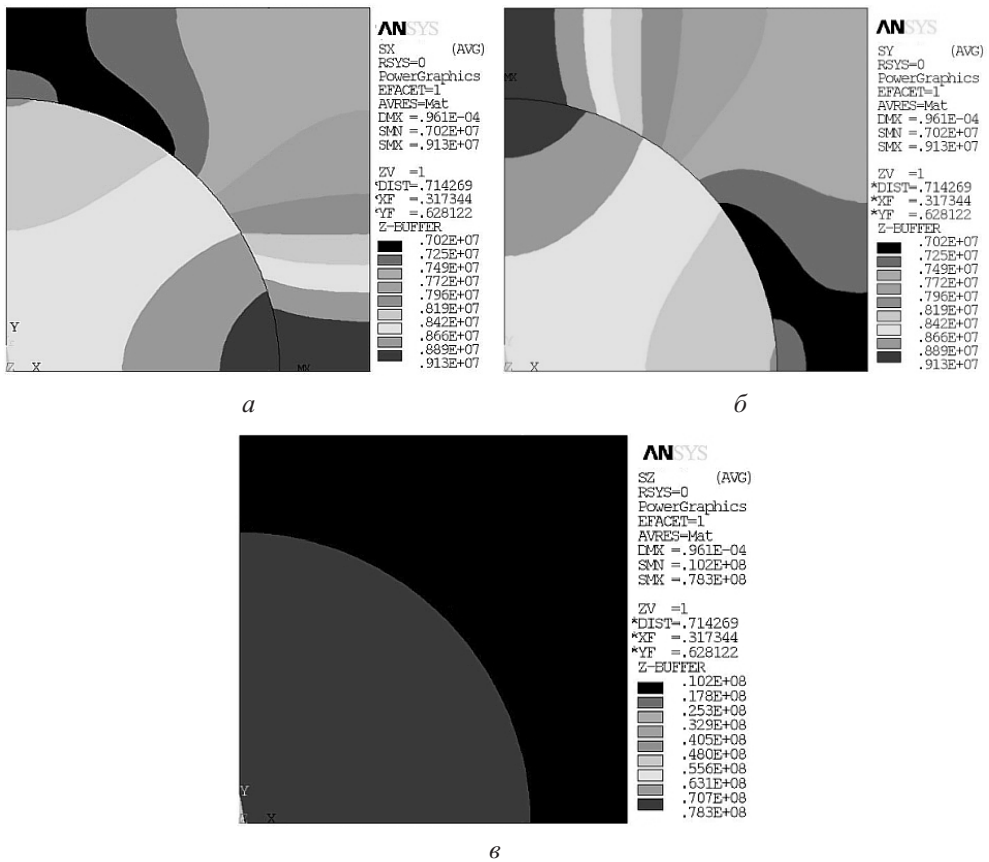


Рис. 3. Распределение нормальных напряжений  $\sigma_x$  (а),  $\sigma_y$  (б) и  $\sigma_z$  (в).

Второй численный эксперимент моделирует одноосное деформирование в направлении волокон (ось  $x$ ).

Для структурного анализа репрезентативной ячейки граничные условия, соответствующие этому виду деформирования композита, следующие. На линии  $x=1$ :  $u_x = 10^{-3}$ ;  $\tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$ , где  $u_x$  – перемещение в направлении оси  $x$ . На остальных линиях задаются условия симметрии относительно соответствующих линий.

Средние значения компонентов тензора деформации при этом будут:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0. \quad (7)$$

Средние значения напряжений вычислялись в постпроцессоре по завершении анализа:

$$\langle \sigma_x \rangle = \int_0^1 \sigma_x(x=1, y) dy; \quad \langle \sigma_y \rangle = \int_0^1 \sigma_y(x, y=1) dx. \quad (8)$$

Результаты второго численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) следующие упругие постоянные:

$$b_{11} = \langle \sigma_x \rangle / \langle \varepsilon_x \rangle; \quad b_{21} = \langle \sigma_y \rangle / \langle \varepsilon_x \rangle. \quad (9)$$

Третий численный эксперимент моделирует поперечный сдвиг материала в плоскости  $xy$ .

Граничные условия задавались на линии  $x=0$ :  $u_y=0$ ;  $\sigma_x=0$ , на линии  $x=1$ :  $u_y=10^{-3}$ ;  $\sigma_x=0$  и на линиях  $y=0$ ,  $y=1$ :  $u_x=0$ ;  $\sigma_y=0$ . Средние значения компонентов тензора деформации при этом будут:

$$\langle \varepsilon_x \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_y \rangle = 0; \quad \langle \varepsilon_z \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xy} \rangle = 10^{-3}; \quad \langle \gamma_{yz} \rangle = 0; \quad \langle \gamma_{xz} \rangle = 0. \quad (10)$$

По завершении анализа в постпроцессоре вычислялись средние значения напряжений:

$$\langle \tau_{xy} \rangle = \int_0^1 \tau_{xy}(x=1, y) dy. \quad (11)$$

Результаты третьего численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) модуль сдвига эквивалентного материала:

$$b_{44} = \langle \tau_{xy} \rangle / \langle \gamma_{xy} \rangle. \quad (12)$$

Четвертый численный эксперимент моделирует продольный сдвиг материала в плоскости  $xz$ . Для его выполнения с использованием программного комплекса ANSYS требуется построение 3D модели репрезентативного объема. Решение пространственной задачи с высокой степенью детализации требует значительного времени и ресурсов ПК. Можно ограничиться 2D анализом, если воспользоваться математической аналогией между задачей о продольном сдвиге призматического элемента (как частным случаем антиплоской деформации) и задачей о стационарном распределении температуры в плоской области.

Решение антиплоской задачи для случая продольного сдвига сводится к нахождению перемещения  $w(y, z)$  в направлении армирования.

Функция  $w(x, y)$  должна удовлетворять гармоническому уравнению в области  $S$  поперечного сечения репрезентативного объема  $S = S_1 \cup S_2$  (рис. 1).

Гармоническое уравнение имеет один и тот же вид в областях  $S_1$  и  $S_2$ :

$$\nabla^2 w = 0. \quad (13)$$

Касательные напряжения выражаются через перемещение  $w(x, y)$  с учетом различия между модулями сдвига для волокон и связующего:

$$\tau_{xz}^1 = G_1 \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{yz}^1 = G_1 \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \tau_{xz}^2 = G_2 \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \tau_{yz}^2 = G_2 \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (14)$$

На внешних границах области  $S$  задается условие  $\tau_{xz}l + \tau_{xy}m = p_{zn}$ , где  $l, m$  – компоненты единичной нормали к поверхности;  $p_{zn}$  – внешняя продольная нагрузка. На линиях  $z = 0, x = 0$  можно задавать условия нуль-перемещений при сдвиге в плоскости  $xoz$ :  $w = 0$  ( $x = 0$ ) и в плоскости  $yoz$ :  $w = 0$  ( $y = 0$ ).

Стационарная задача теплопроводности также сводится к гармоничному уравнению для температурного поля  $T(x, y)$ :

$$\nabla^2 T = 0. \quad (15)$$

Тепловой поток в разных областях определяется соотношениями:

$$Q_x^1 = K_1 \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Q_y^1 = K_1 \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Q_x^2 = K_2 \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Q_y^2 = K_2 \frac{\partial T}{\partial y}, \quad (16)$$

где  $K_1, K_2$  – коэффициенты теплопроводности для соответствующих областей.

На внешних границах области  $S$  могут быть заданы граничные условия второго рода:  $Q_x l + Q_y m = Q_n$ , где  $Q_n$  – внешний тепловой поток, заданный на границе. На линии  $y = 0$  можно принять нулевую температуру. На линии  $y = 1$  задается постоянная температура  $T = 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$ , на линиях  $x = 0$  и  $x = 1$  – условия симметрии (тепловой поток равен нулю).

На границе  $l_k$  между различными областями должны выполняться условия непрерывности. Для задачи о продольном сдвиге должны быть непрерывны перемещения и касательные напряжения, для задачи о стационарном распределении температуры – температура и тепловые потоки.

Краевые задачи о продольном сдвиге (13) и (14) аналогичны краевым задачам теплопроводности (15) и (16).

Если при решении задачи теплопроводности принять, что  $K_1 = G_1, K_2 = G_2$ , то численные значения температуры  $T(x, y)$  будут равны перемещению  $w(x, y)$ , а тепловые потоки  $Q_x, Q_y$  – касательным напряжениям:

$$Q_x = \tau_{xz}; \quad Q_y = \tau_{yz}. \quad (17)$$

Результаты такого моделирования представлены при температуре  $T = 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$  в узлах на линии  $y = 1$  (рис. 4).

Сравнение уравнения (14) с (16) показывает, что результаты четвертого численного эксперимента позволяют определить на основе соотношений (2) упругую характеристику эквивалентного материала

$$b_{55} = \langle \tau_{yz} \rangle / \langle \gamma_{yz} \rangle. \quad (18)$$

Для решения практических задач часто используется закон Гука в прямой форме

$$\langle \varepsilon \rangle = [A] \langle \sigma \rangle, \quad (19)$$

где  $[A]$  – обратная матрица упругих постоянных,  $[A] = [B]^{-1}$ .

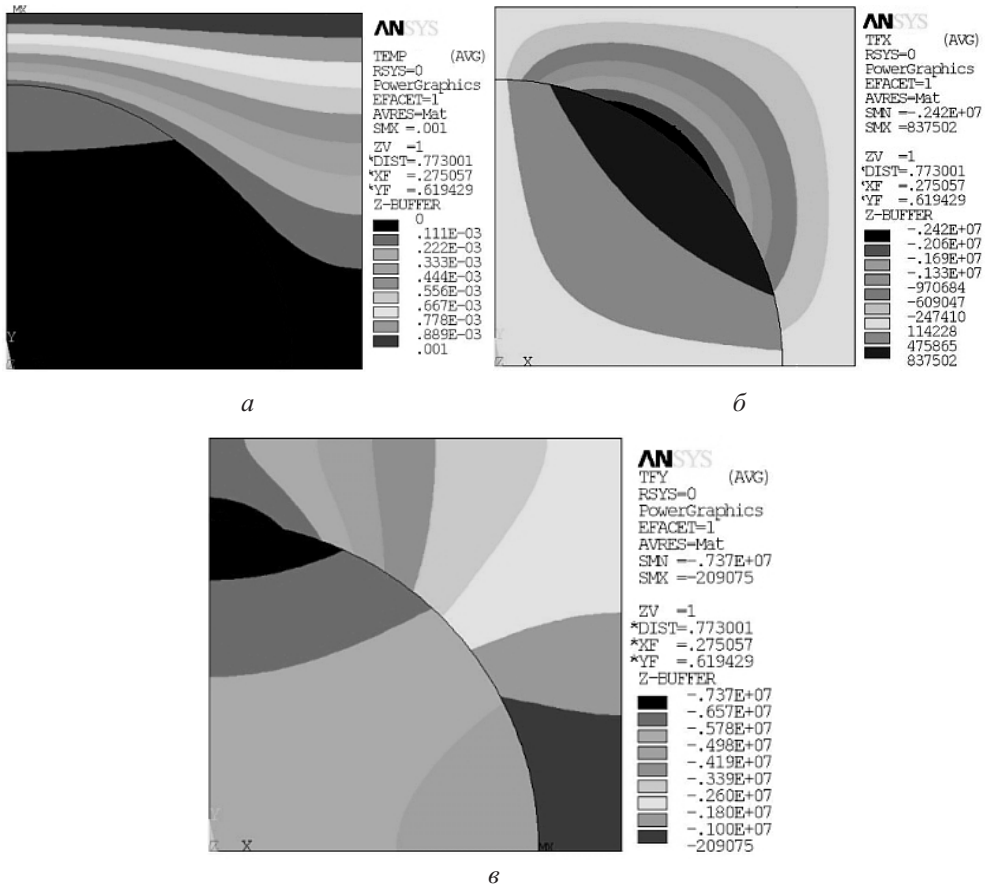


Рис. 4. Результаты моделирования на линии  $y=1$  при  $\xi = 0,488$ ;  $a$  – распределение температуры при  $T = 10^{-3\alpha}$ , соответствующее перемещению  $w$  при продольном сдвиге;  $б$  – тепловой поток  $Q_x$  в узлах при  $T = 10^{-3\alpha}$ , соответствующий напряжению  $\tau_{xz}$ ;  $в$  – тепловой поток  $Q_y$  в узлах при  $T = 10^{-3\alpha}$ , соответствующий напряжению  $\tau_{yz}$ .

На основе матрицы  $[A]$  определяем упругие характеристики, включая модули упругости, коэффициенты Пуассона и модули сдвига эквивалентного материала:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E_x}; & a_{22} &= \frac{1}{E_y}; & a_{33} &= \frac{1}{E_z}; & a_{12} &= -\frac{\nu_{yx}}{E_y} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x}; \\ a_{13} &= -\frac{\nu_{zx}}{E_z} = -\frac{\nu_{xz}}{E_x}; & a_{23} &= -\frac{\nu_{zy}}{E_z} = -\frac{\nu_{yz}}{E_y}; \\ G_{xy} &= b_{44}; & G_{yx} &= b_{55}; & G_{zx} &= b_{66}. \end{aligned} \quad (20)$$

Вышеприведенная численная методика реализована в программном комплексе ANSYS. В таблице представлены упругие свойства стеклопластика при  $\xi = 0,488$ .

Эффективные упругие постоянные

| E, МПа |       |       | G, МПа   |          |          | ν          |            |            |
|--------|-------|-------|----------|----------|----------|------------|------------|------------|
| $E_x$  | $E_y$ | $E_z$ | $G_{xy}$ | $G_{xz}$ | $G_{yz}$ | $\nu_{xy}$ | $\nu_{zx}$ | $\nu_{yz}$ |
| 18050  | 18050 | 43840 | 4100     | 4900     | 4900     | 0,32       | 0,08       | 0,29       |

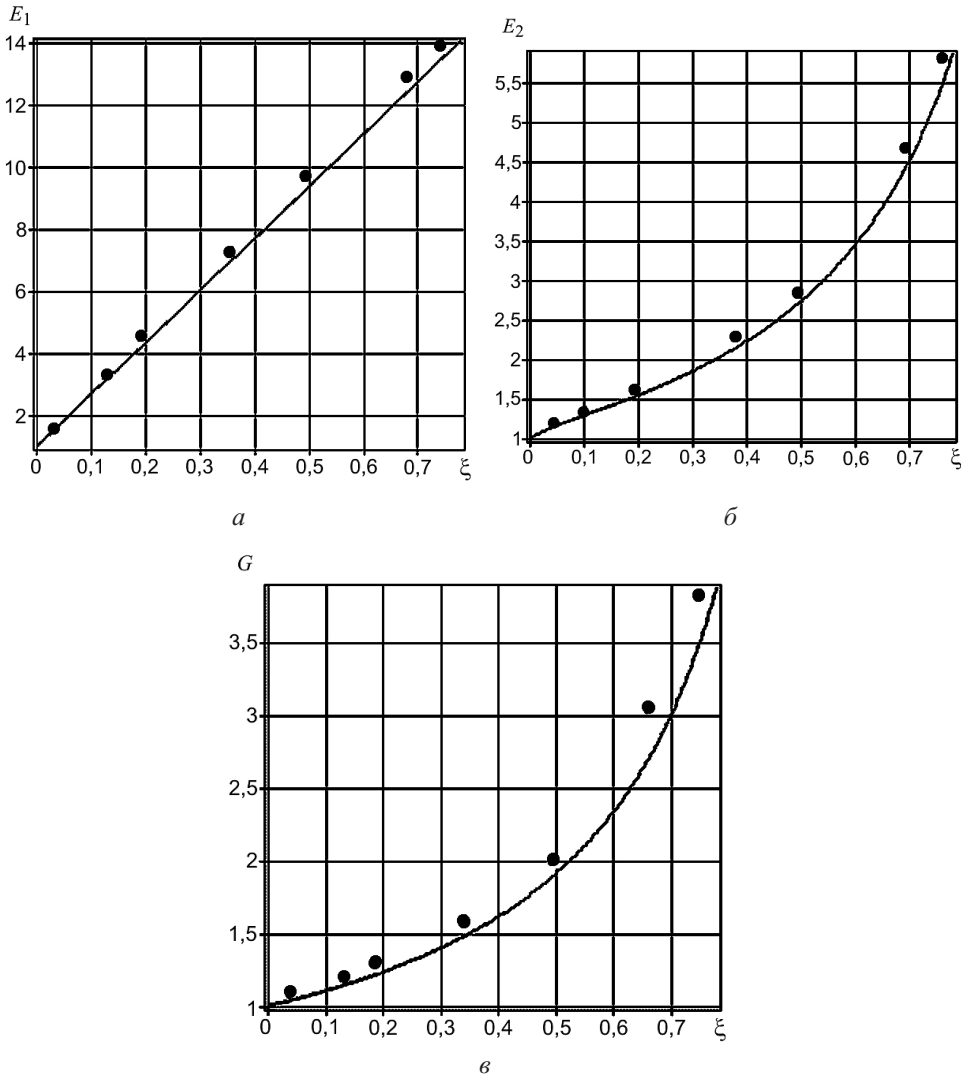


Рис. 5. Зависимость безразмерных модулей упругости  $E_1 = E_x/E_m$  (а),  $E_2 = E_y/E_m$  (б) и сдвига  $G = G_{xy}/G_m$  (в) композита от относительного объемного содержания волокна  $\xi$ : точки – по численной методике; линии – по теоретическим методам.

Построены численные зависимости безразмерных модулей упругости  $E_1 = E_x/E_m$ ,  $E_2 = E_y/E_m$  и сдвига  $G = G_{xy}/G_m$  композита от относительного объемного содержания волокна  $\xi$  (рис. 5).

Численные результаты сравниваются с приближенными оценками по методике [6], в которой используется аналитическое решение для однонаправленного композита:



$$E_x^0 = \xi E_f + (1 - \xi) E_m + \frac{8G_m \xi (1 - \xi) (\nu_f - \nu_m)}{2 - \xi + \chi_m \xi + (1 - \xi) (\chi_f - 1) G_m / G_f}; \quad (21)$$

$$G_{xy}^0 = G_m \frac{1 - \xi + (1 - \xi) G_m / G_f}{1 - \xi + (1 + \xi) G_m / G_f}; \quad (22)$$

$$\frac{1}{E_y^0} = \frac{(\nu_{yx})^2}{E_x} + \frac{1}{8G_m} \left[ \frac{2(1 - \xi)(\chi_m - 1) + (\chi_f - 1)(\chi_m - 1 + 2\xi) G_m / G_f}{2 - \xi + \chi_m \xi + (1 - \xi) (\chi_f - 1) G_m / G_f} + \right. \\ \left. + 2 \frac{\chi_m (1 - \xi) + (1 + \xi) \chi_m G_m / G_f}{\chi_m + \xi + (1 - \xi) G_m / G_f} \right]; \quad (23)$$

$$\nu_{xy}^0 = \nu_m - \frac{(\chi_m + 1)(\nu_m - \nu_f) \xi}{2 - \xi + \chi_m \xi + (1 - \xi) (\chi_f - 1) G_m / G_f}, \quad (24)$$

где  $\chi_m = 3 - 4\nu_m$ ;  $\chi_f = 3 - 4\nu_f$ .

## Выводы

1. Разработана методика нахождения эффективных упругих характеристик однонаправленно армированных волокнистых композитов.

2. С использованием метода конечных элементов с помощью ANSYS определены эффективные упругие свойства эпоксидстеклопластика.

## Резюме

Досліджено ефективні характеристики волокнистих композитів. Розрахунки виконано за допомогою програмного комплексу ANSYS. У результаті чисельного дослідження напруженого стану репрезентативної комірки визначено ефективні пружні властивості однонаправлено армованого композита.

1. *Лифшиц И. М., Розенцвейг Л. Н.* К теории упругих свойств поликристаллов // Журн. exper. и теорет. физики. – 1946. – **16**, вып. 11. – С. 967–980.
2. *Ломакин В. А.* Статистические задачи механики твердых деформируемых тел. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
3. *Nunziato J. W. and Cowin S. C.* A nonlinear theory of elastic materials with voids // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1979. – **72**, No. 2. – P. 175–201.
4. *Хорошун Л. П., Вецало Ю. А.* К теории эффективных свойств идеально пластических композитных материалов // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 1. – С. 86–90.
5. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 400 с.
6. *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 304 с.
7. *Beran M. J.* Statistical Continuum Theories. – New York: Interscience Publishers, 1968. – 424 p.

8. *Hermans J. J.* The elastic properties of fiber reinforced materials when the fibers are aligned // Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetenschap., Amsterdam. – 1967. – **B70**, No. 1. – P. 1–9.
9. *Schmauder S. and Mishnaevsky L.* Micromechanics and Nanosimulation of Metals and Composites. – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. – 420 p.
10. *Andrianov I. V., Danishevs'ky V. V., Guillet A., and Pareige P.* Effective properties and micro-mechanical response of filamentary composite wires under longitudinal shear // J. Eur. J. Mech. A/Solids. – 2005. – **24**. – P. 195–206.
11. *Jahedmotlagh H. R., Nooban M. R., and Eshraghee M. A.* ANSYS. – Tehran University, 2006. – 98 p.
12. *Дария Заде С.* Численная методика определения эффективных характеристик однонаправленно армированных композитов // Вестн. НТУ “ХПИ”. – 2013. – **58**. – С. 71–77.

Поступила 22. 09. 2014