

Модели предельного состояния конструкционных материалов при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и кручением

В. П. Голуб

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Предложены точные и приближенные варианты моделей предельного состояния для изотропных металлических материалов при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и кручением. В точных моделях зависимость между предельными амплитудами нормальных и касательных напряжений задается степенными трансцендентными функциями. Приближенные варианты моделей получены из точных путем разложения трансцендентных функций в ряд и удержания в разложении двух и трех членов ряда. Модели апробированы экспериментально на задачах расчета предельного состояния сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов. Дается сравнение предложенных моделей с моделями, построенными на основе классических критериев разрушения.

Ключевые слова: двухосное комбинированное нагружение, циклический изгиб, циклическое кручение, усталостное разрушение, модели предельного состояния, классические критерии разрушения, экспериментальная апробация.

Введение. Напряженное состояние, возникающее в наиболее нагруженных элементах многих ответственных конструкций, характеризуется, как правило, различными комбинациями статических и циклических нормальных и касательных напряжений [1–3]. Основной причиной преждевременного выхода из строя таких элементов конструкций является многоосная усталость, сопротивление развитию которой оценивается как экспериментально, так и с использованием соответствующих моделей предельного состояния.

Одной из актуальных задач многоосной усталости, имеющей большое прикладное значение, считается задача оценки предельного состояния образцов материалов и элементов конструкций при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и кручением. В этой области накоплен большой объем экспериментальных данных и сформулирован ряд эмпирических соотношений, устанавливающих зависимость между предельными амплитудами циклических нормальных и касательных напряжений [1–4].

Модели предельного состояния при двухосном комбинированном нагружении строятся также на основе классических критериев усталостного разрушения, аналогичных по структуре критериям пластичности и длительной прочности [1, 5–8]. В качестве классических критериев усталостного разрушения чаще всего используются критерий максимальных нормальных напряжений, критерий максимальных касательных напряжений, критерий удельной энергии формоизменения, а также критерий Геста–Мора и его модификации.

Однако эмпирические модели предельного состояния и модели, построенные на основе критериев разрушения, удовлетворяют весьма ограниченному классу материалов. В частности, классические критерии разрушения оказываются справедливыми при выполнении заданных соотношений между характеристиками усталостной прочности на сдвиг и на растяжение и равные соответственно 1 ; $1/2$; $1/\sqrt{3}$. Для реальных материалов это соотношение может зависеть от долговечности и изменяться в широких пределах, поэтому ни один из указанных критериев разрушения не является общим.

В работах [9, 10] показано, что модели предельного состояния при сложном напряженном состоянии могут быть построены на основе степенных трансцендентных функций, где показатели степени считаются материальными константами. В [11, 12] этот подход апробирован экспериментально на задаче построения моделей предельного состояния при комбинированном нагружении циклическим растяжением–сжатием и циклическим кручением.

В настоящей работе на основе степенных трансцендентных функций построены и экспериментально апробированы модели предельного состояния при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и кручением.

1. Постановка задачи. Рассматривается усталостное разрушение сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов (рис. 1) при комбинированном синфазном нагружении симметричным циклическим изгибающим моментом \bar{M}_b и циклическим крутящим моментом \bar{M}_t , приложенным к торцам образцов.

Нормальные $\tilde{\sigma}(t)$ и касательные $\tilde{\tau}(t)$ компоненты двухосного переменного напряженного состояния задаются соотношениями

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_{xa} = \sigma_a g(n); & \tilde{\sigma}_{ya} = 0; & \tilde{\sigma}_{za} = 0; \\ \tilde{\tau}_{xya} = \tau_a g(n); & \tilde{\tau}_{yza} = 0; & \tilde{\tau}_{zxa} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $\tilde{\sigma}_{xa}, \dots, \tilde{\tau}_{xya}, \dots$ – переменные составляющие нормальных изгибных и касательных компонент напряжений; σ_a, τ_a – амплитудные значения соответствующих переменных составляющих; $g(n)$ – некоторая периодическая функция времени, изменяющаяся в пределах $-1 \dots +1$; n – число циклов нагружения.

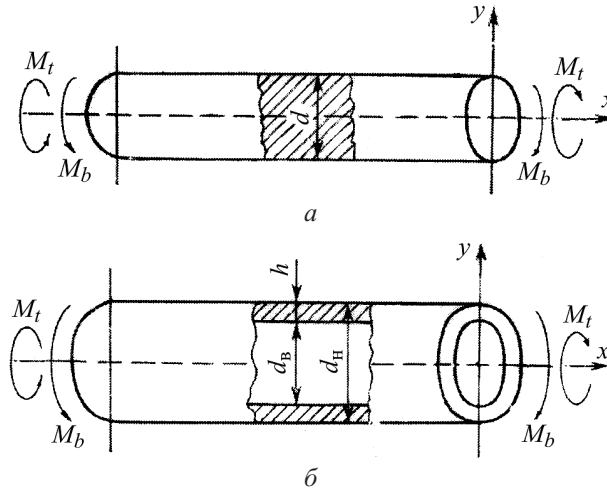


Рис. 1. Сплошной цилиндрический (а) и тонкостенный трубчатый (б) образцы при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и кручением.

Амплитуды нормальных σ_a и касательных τ_a напряжений в (1) при нагружении сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых элементов симметричным циклическим изгибающим моментом и циклическим крутящим моментом определяются соответственно из уравнений

$$\sigma_a = \frac{32M_{ab}}{d^3}; \quad \tau_a = \frac{16M_{at}}{\pi d^3} \quad (2)$$

и

$$\sigma_a = \frac{6M_{ab}}{d_H^3 - d_B^3}; \quad \tau_a = \frac{16M_{at}d_H}{\pi(d_H^4 - d_B^4)}, \quad (3)$$

где M_{ab} – амплитуда циклического изгибающего момента; M_{at} – амплитуда циклического крутящего момента; d – диаметр цилиндрического стержня; d_H, d_B – наружный и внутренний диаметры тонкостенного трубчатого элемента.

Считается далее, что амплитудные значения σ_a и τ_a переменных изгибных напряжений и напряжений кручения не зависят от времени (стационарный режим), не превышают пределов текучести материала σ_Y и τ_Y и достаточно быстро (частота нагружения $f \geq 5 \dots 10$ Гц) изменяются от цикла к циклу. В этом случае усталостное разрушение реализуется в многоцикловой области, где число циклов до разрушения $n_R \geq 10^4$. Кроме того, соотношения (1) отражают условия синфазности напряжений, что согласно теории пластичности адекватно условию простого нагружения [5].

Задача заключается в обосновании использования степенных трансцендентных функций для задания зависимости между компонентами напряженного состояния (1) и числом циклов до разрушения n_R и сводится к конкретизации функции вида

$$\psi\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}; \frac{\tau_a}{\tau_n}; q_j\right) = 1 \quad (j = \overline{1, k}), \quad (4)$$

которую можно представить в виде суперпозиции функций:

$$\psi(\cdot) = \psi_\sigma\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right) + \psi_\tau\left(\frac{\tau_a}{\tau_n}\right) = 1, \quad (5)$$

где ψ_σ, ψ_τ – функции, задающие влияние напряжений изгиба и напряжений кручения; σ_n и τ_n – ограниченные пределы выносливости при чистом изгибе и чистом кручении соответственно; q_j – набор материальных констант.

При $\tau_a = 0$ усталостное разрушение происходит в условиях чистого изгиба, при $\sigma_a = 0$ – в условиях чистого кручения. Функции $\psi(\cdot)$ при этом должны удовлетворять условиям

$$\psi_\sigma\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)\Big|_{\tau_a=0} = 1 \quad \text{и} \quad \psi_\tau\left(\frac{\tau_a}{\tau_n}\right)\Big|_{\sigma_a=0} = 1 \quad (6)$$

независимо от значения коэффициентов q_j .

В качестве трансцендентных функций выбираются функции $\cos(\cdot)$ и $\arccos(\cdot)$, а в качестве аргумента этих функций – величина σ_a/σ_n . В этом случае соотношения (6) удовлетворяются при выполнении условий

$$\psi_\sigma\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)\Big|_{\tau_a=0} = \left[\cos\left(\frac{\pi \sigma_a}{2 \sigma_n}\right)\right]^\eta \quad \text{и} \quad \psi_\tau\left(\frac{\tau_a}{\tau_n}\right)\Big|_{\sigma_a=0} = \frac{\tau_a}{\tau_n} \quad (7)$$

и соответственно условий

$$\psi_\sigma\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)\Big|_{\tau_a=0} = \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)\right]^\xi \quad \text{и} \quad \psi_\tau\left(\frac{\tau_a}{\tau_n}\right)\Big|_{\sigma_a=0} = \frac{\tau_a}{\tau_n}, \quad (8)$$

где η , ζ – показатели степени, задающие форму зависимости между предельными напряжениями для фиксированного числа циклов до разрушения n_R .

Задание зависимости между предельными напряжениями двухосного комбинированного нагружения (1) с использованием степенных трансцендентных функций (7) и (8) обосновывается экспериментально на примере оценки предельного состояния и усталостной долговечности гладких цилиндрических образцов из алюминиевого и титанового сплавов и из высокопрочных сталей, а также сварных тонкостенных образцов из углеродистой стали. Экспериментальные данные заимствованы из [13–17].

2. Модели предельного состояния. Зависимости вида (4) задают изохронные диаграммы предельных напряжений в нормированной системе координат и интерпретируются далее как модели предельного состояния при комбинированном синфазном нагружении симметричным циклическим изгибом и симметричным циклическим кручением.

2.1. Основные соотношения моделей. При использовании функции $\cos(\cdot)$ в качестве исходной модель предельного состояния (5) с учетом граничных условий (7) конкретизируется в виде

$$\frac{\tau_a}{\tau_n} - \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right) \right]^\eta = 0, \quad (9)$$

где показатель степени η определяется экспериментально по методике, изложенной ниже (разд. 2.2).

Раскладывая функцию $\cos(\cdot)$ в ряд и ограничиваясь двумя членами разложения, модель предельного состояния (9) сводится к уравнению

$$\left[\frac{\tau_a}{\tau_n} \right]^{1/\eta} + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_a}{\sigma_n} \right]^2 = 1, \quad (10)$$

а ограничиваясь тремя членами ряда – к уравнению

$$\left[\frac{\tau_a}{\tau_n} \right]^{1/\eta} + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_a}{\sigma_n} \right]^2 - \frac{1}{24} \left[\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_a}{\sigma_n} \right]^4 = 1. \quad (11)$$

При использовании функции $\arccos(\cdot)$ в качестве исходной модель предельного состояния (5) с учетом граничных условий (8) конкретизируется в виде

$$\frac{\tau_a}{\tau_n} - \frac{2}{\pi} \left[\arccos\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right) \right]^\xi = 0, \quad (12)$$

где показатель степени ξ определяется экспериментально по методике, изложенной ниже (разд. 2.2).

Раскладывая функцию $\arccos(\cdot)$ в ряд и ограничиваясь двумя членами разложения, модель предельного состояния (12) сводится к уравнению

$$\frac{\tau_a}{\tau_n} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n} \right)^\xi = 1, \quad (13)$$

а ограничиваясь тремя членами ряда –

$$\frac{\tau_a}{\tau_n} + \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n} \right)^\zeta + \frac{1}{3\pi} \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n} \right)^{3\zeta} = 1 \quad (14)$$

В моделях предельного состояния (9) и (12) граничные условия (7) и (8) удовлетворяются точно. Действительно, полагая в (9) и (12) $\sigma_a = 0$, получаем $\tau_a = \tau_n$, при $\tau_a = 0$ соответственно $\sigma_a = \sigma_n$. В приближенных моделях (10), (11), (13) и (14) граничные условия по касательной компоненте удовлетворяются точно, т.е. $\tau_a = \tau_n$ при $\sigma_a = 0$, в то время как по нормальной компоненте в моделях (10) и (11) они удовлетворяются приближенно с погрешностью 2 и 10% соответственно. В моделях (13) и (14) погрешность по нормальной компоненте зависит от показателя степени ζ и может достигать 40%.

2.2. Методика определения материальных констант. Модели предельного состояния (9)–(14) содержат две группы материальных констант, определяемых экспериментально.

В первую группу констант входят коэффициенты уравнений, устанавливающих зависимость между ограниченными пределами выносливости σ_n и τ_n и числом циклов до разрушения n_R при чистом изгибе и чистом кручении соответственно. Уравнения задаются в виде

$$n_R = \frac{1}{(1+q_\sigma)D_\sigma(\sigma_n)^{q_\sigma}} \quad \text{и} \quad n_R = \frac{1}{(1+q_\tau)D_\tau(\tau_n)^{q_\tau}}, \quad (15)$$

где коэффициенты q_σ , D_σ , q_τ , D_τ определяются по результатам аппроксимации уравнениями (15) соответствующих экспериментальных данных, полученных при испытаниях на усталость.

Задача определения коэффициентов q_σ , D_σ и q_τ , D_τ в (15) сводится к минимизации соответственно функционалов

$$\Phi(q_\sigma, D_\sigma) = \sum_{j=1}^s \{n_{Rj}(\sigma_{aj}) - [(1+q_\sigma)D_\sigma(\sigma_{aj})^{q_\sigma}]^{-1}\}^2 \quad (16)$$

и

$$\Phi(q_\tau, D_\tau) = \sum_{j=1}^s \{n_{Rj}(\tau_{aj}) - [(1+q_\tau)D_\tau(\tau_{aj})^{q_\tau}]^{-1}\}^2, \quad (17)$$

где σ_{aj} , τ_{aj} , n_{Rj} – набор дискретных значений амплитуд циклических нормальных и касательных напряжений и соответствующих им чисел циклов до разрушения.

Во вторую группу материальных констант входят показатели степени η и ζ , характеризующие чувствительность материала к нормальной компоненте при двухосном комбинированном нагружении.

Значения η и ζ определяются из условия наилучшего согласования экспериментальных значений касательных τ_{aj} , τ_{nj} и нормальных σ_{aj} , σ_{nj} напряжений с единой линеаризованной предельной диаграммой (рис. 2). Диаграмма удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\tau_{aj}}{\tau_{nj}} = \left[\cos \left(\frac{\pi \sigma_{aj}}{2 \sigma_{nj}} \right) \right]^\eta \quad (18)$$

или

$$\frac{\tau_{aj}}{\tau_{nj}} = \frac{2}{\pi} \left[\arccos \left(\frac{\sigma_{aj}}{\sigma_{nj}} \right) \right]^\zeta, \quad (19)$$

которые следуют соответственно из (9) и (12) при условии, что значениям τ_{nj} и σ_{nj} отвечает одно и то же число циклов до разрушения n_R .

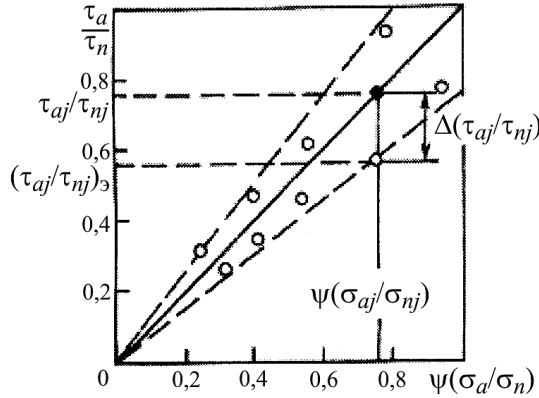


Рис. 2. Единая линейаризованная предельная диаграмма.

Задача определения величин η и ζ сводится к минимизации соответственно функционалов

$$\Phi(\eta) = \sum_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{\tau_{aj}}{\tau_{nj}} \right) - \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{aj}}{\sigma_{nj}} \right) \right]^\eta \right\}^2 \quad (20)$$

и

$$\Phi(\zeta) = \sum_{j=1}^k \left\{ \left(\frac{\tau_{aj}}{\tau_{nj}} \right) - \frac{2}{\pi} \left[\arccos \left(\frac{\sigma_{aj}}{\sigma_{nj}} \right) \right]^\zeta \right\}^2. \quad (21)$$

Комбинации касательных τ_a и нормальных σ_a напряжений в базовом эксперименте выбираются таким образом, чтобы удовлетворялись соотношения

$$\nu = \frac{\tau_a}{\sigma_a} = \frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{3}}; 1,0, \quad (22)$$

которые следуют из критерия максимальных касательных напряжений, критерия удельной энергии формоизменения и критерия максимальных нормальных напряжений.

2.3. **Основные механические эффекты.** Модели предельного состояния (9) и (12) задают существенно нелинейный характер зависимости между нормальной и касательной компонентами двухосного комбинированного циклического нагружения. Характер и степень нелинейности предельного состояния определяются величиной показателей степени η и ζ , диапазон изменения которых может быть задан в пределах 1...10.

Особенности изменения диаграмм предельных напряжений, задаваемых моделями (9) и (12) при варьировании показателей степени η и ζ , показаны на рис. 3. Видно, что модели предельного состояния, построенные на основе степенных трансцендентных функций, позволяют охватить практически все формы зависимости между нормальными и касательными компонентами двухосного напряженного состояния. Эти формы включают вогнутые диаграммы предельного состояния, S-образные, близкие к прямым линиям, а также выпуклые.

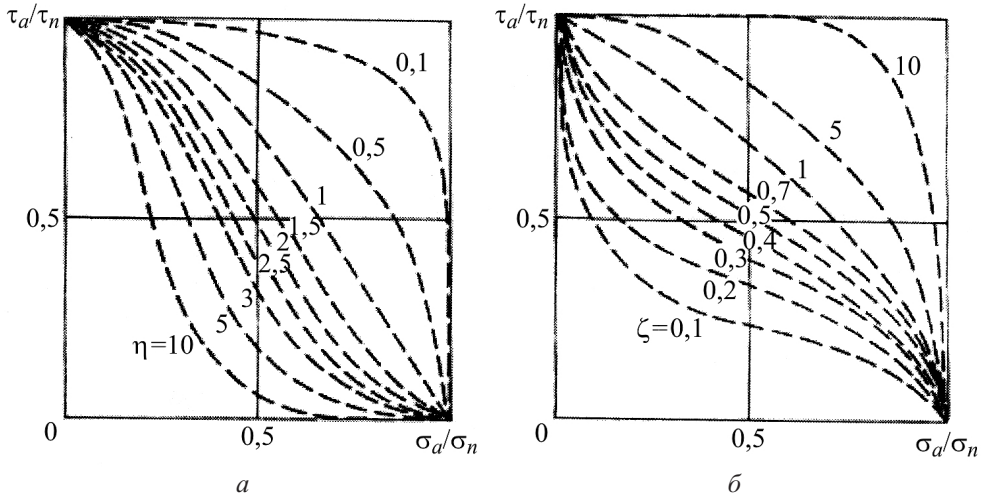


Рис. 3. Диаграммы предельных нормальных (а) и касательных (б) напряжений при варьировании показателей степени: а – η в (9); б – ζ в (12).

Различие между моделями предельного состояния проявляется в различном характере снижения амплитуды касательных напряжений τ_a при увеличении амплитуды нормальных напряжений σ_a в области малых ($\eta = \zeta \approx 0,1$) и больших ($\eta = \zeta \approx 10$) значений η и ζ . Согласно модели (9) в каждой из этих областей амплитуда касательных напряжений τ_a уменьшается практически мгновенно, в то время как в соответствии с моделью (12) величина τ_a при некоторых значениях σ_a остается постоянной.

3. Предельное состояние сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов. Модели предельного состояния, сформулированные в разд. 2, апробированы экспериментально на задачах расчета предельного состояния, инвариантного усталостной долговечности, и предельного состояния по параметру усталостной долговечности. Апробация включает определение материальных констант модели, выбор вида трансцендентной функции и расчет предельного состояния.

3.1. Материал образцов и материальные константы. Экспериментальная апробация моделей предельного состояния (9)–(14) осуществляется на примере оценки предельного состояния сплошных цилиндрических образцов из алюминиевого сплава 76S-T61, титанового сплава ПТ-3В, стали перлитного класса 38ХНЗМФА, высокопрочной стали SAE4340, а также сварных тонкостенных трубчатых образцов из стали 20 и мелкозернистой стали StE460. Экспериментальные данные заимствованы соответственно из [13, 14, 15, 16, 17, 18].

Значения коэффициентов q_σ , D_σ и q_τ , D_τ , а также значения показателей степени η и ζ , рассчитанные для исследованных материалов по изложенной в разд. 2.2 методике, приведены в табл. 1. Материалы систематизированы в порядке возрастания показателя η и уменьшения ζ .

Т а б л и ц а 1

Значения коэффициентов q , D и показателей степени η , ζ

№ материала	Материал	q_σ	D_σ , МПа ^{-q} /цикл	q_τ	D_τ , МПа ^{-q} /цикл	η	ζ
1	Сталь SAE 4340	7,63	$5,42 \cdot 10^{-27}$	23,25	$2,61 \cdot 10^{-65}$	0,44	2,49
2	Сплав 76S-T61	12,82	$4,27 \cdot 10^{-37}$	12,20	$2,82 \cdot 10^{-33}$	0,53	1,82
3	Сталь StE460	5,46	$1,60 \cdot 10^{-18}$	5,71	$2,16 \cdot 10^{-18}$	0,63	1,63
4	Сталь 20	3,10	$1,23 \cdot 10^{-12}$	6,99	$9,39 \cdot 10^{-21}$	0,63	1,28
5	Сталь 38ХНЗМФА	13,36	$7,76 \cdot 10^{-42}$	31,03	$5,89 \cdot 10^{-83}$	0,69	1,25
6	Сплав ПТ-3В	5,32	$4,71 \cdot 10^{-21}$	3,70	$1,12 \cdot 10^{-15}$	6,98	0,20

Сравнение данных, приведенных в табл. 1 на рис. 3, показывает, что для титанового сплава ПТ-3В предельные диаграммы являются вогнутыми, для остальных материалов – выпуклыми.

На рис. 4 представлены зависимости отношения τ_n/σ_n ограниченных пределов выносливости при чистом кручении τ_n и чистом изгибе σ_n исследованных материалов от числа циклов до разрушения n_R .

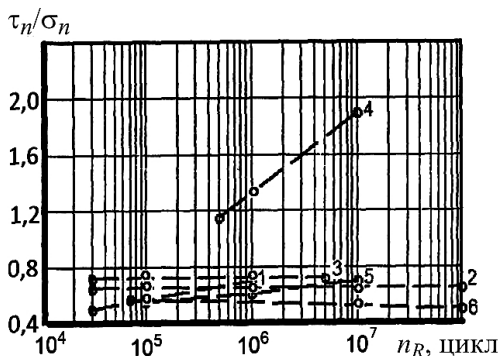


Рис. 4. Зависимость величины τ_n/σ_n от числа циклов до разрушения n_R . (1–6 соответствуют номеру материала в табл. 1.)

Видно, что для всех исследованных материалов, за исключением стали 20, величина τ_n/σ_n меньше единицы и практически не зависит от числа циклов до разрушения n_R . Эти материалы можно считать “пластичными” или близкими к пластичным [19]. Для стали 20, которая относится к хрупким материалам, отношение τ_n/σ_n больше единицы и с ростом величины n_R увеличивается примерно в 1,5 раза.

Предельное состояние рассматриваемых материалов проанализировано на примере разрушения сплошных цилиндрических образцов из стали SAE 4340 и титанового сплава ПТ-3В, а также тонкостенных трубчатых образцов из стали 20. Образцы из стали SAE 4340 и сплава ПТ-3В относятся к классу пластичных материалов ($\tau_n/\sigma_n = 0,5...0,8$) с выпуклыми ($\eta = 0,44$) и вогнутыми ($\eta = 6,98$) предельными диаграммами соответственно, образцы из стали 20 – к классу хрупких материалов ($\tau_n/\sigma_n = 1,0...1,9$) с выпуклыми ($\eta = 0,63$) предельными диаграммами.

3.2. Выбор вида трансцендентной функции. Модели предельного состояния, сформулированные в разд. 2, основаны на использовании степенных трансцендентных функций (7) и (8). Выбор одной из них, наиболее точно удовлетворяющей первичным экспериментальным данным, осуществляется по результатам минимизации функционалов (20) и (21). Это позволяет оптимизировать показатели степени η и ζ и определить соответствующие им коэффициенты корреляции r и величину суммарной квадратичной ошибки $\Sigma\Delta^2(\cdot)$ между экспериментальными данными и единой линейризованной предельной диаграммой (рис. 2). В качестве исходной выбирается та трансцендентная функция, для которой величина r оказывается наибольшей, а $\Sigma\Delta^2(\cdot)$ – наименьшей.

На рис. 5 приведено сравнение экспериментальных данных, нормированных с использованием степенных трансцендентных функций (7) и (8) и значений показателей степени η и ζ (табл. 1), с единой линейризованной предельной диаграммой для сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов.

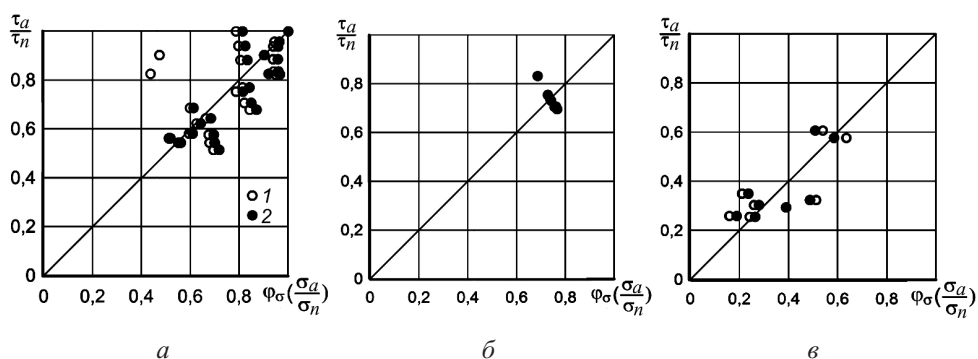


Рис. 5. Единые линейризованные предельные диаграммы (линии) и экспериментальные данные, нормированные с использованием функций $\cos(\cdot)$ (1) и $\arccos(\cdot)$ (2): а, б – сплошные цилиндрические образцы из стали SAE 4340 и титанового сплава ПТ-3В; в – тонкостенные трубчатые образцы из стали 20.

Значения коэффициентов корреляции r и суммарной квадратичной ошибки $\Sigma\Delta^2(\cdot)$, определяемые при реализации процедуры минимизации функционалов (20) и (21), для образцов исследованных материалов приведены в табл. 2.

Из данных, представленных на рис. 5 и в табл. 2, следует, что функции $\cos(\cdot)$ и $\arccos(\cdot)$ с одинаковой практически точностью удовлетворяют единой линейризованной предельной диаграмме, и каждая из них может быть использована для расчета предельного состояния рассмотренных образцов и материалов. В настоящей работе все расчеты предельного состояния строятся на основе модели (9) и ее приближенных вариантов.

3.3. Оценка обобщенного предельного состояния. Под обобщенным следует понимать предельное состояние, которое задается в нормированной системе координат в форме зависимости между относительными значениями амплитуд предельных напряжений при кручении и изгибе. Предельное состояние рассчитывается по модели (9) и по приближенным вариантам моделей (10) и (11).

Результаты расчетов по моделям (9)–(11) с использованием значений коэффициентов (табл. 1) сравниваются с экспериментальными данными, соответствующими различным значениям отношения амплитуд τ_a/σ_a (рис. 6).

Как видно, в целом приближенные модели (10) и (11) вполне удовлетворительно описывают предельное состояние как сплошных цилиндрических, так и тонкостен-

Т а б л и ц а 2

Значения коэффициентов корреляции r и суммарной квадратичной ошибки $\Sigma\Delta^2(\cdot)$ для образцов исследованных материалов

Материал	Образцы	r	$\Sigma\Delta^2(\cdot)$
Сталь SAE 4340	Сплошные	$\frac{0,6309}{0,6099}$	$\frac{0,293914}{0,177457}$
		$\frac{0,7714}{0,7409}$	$\frac{0,324178}{0,217969}$
Сталь StE 460	Тонкостенные	$\frac{0,2392}{0,2392}$	$\frac{0,036877}{0,032584}$
		$\frac{0,4132}{0,4131}$	$\frac{0,851540}{0,642600}$
Сталь 38ХНЗМФА	Сплошные	$\frac{0,8901}{0,8844}$	$\frac{0,520890}{0,368050}$
		$\frac{0,6266}{0,6223}$	$\frac{0,026232}{0,044410}$

Примечание. Над чертой приведены данные, нормированные с использованием функции $\cos(\cdot)$, под чертой – $\arccos(\cdot)$.

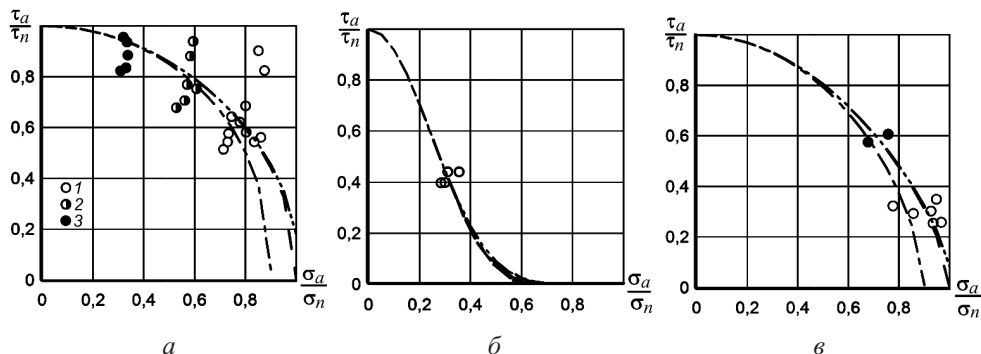


Рис. 6. Расчетные (линии) и нормированные экспериментальные (точки) диаграммы предельных напряжений сплошных цилиндрических образцов из стали SAE 4340 (а) и титанового сплава ПТ-3В (б), а также тонкостенных трубчатых образцов из стали 20 (в) при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и кручением: а – $\nu = 0,496$ (1), 0,868 (2), 1,782 (3); б – $\nu = 0,79$ (1); в – $\nu = 0,435$ (1), 0,910 (3). (Штриховые линии – расчет по (9), штрихпунктирные – по (10), штриховые с двумя пунктирами – по (11).)

ных трубчатых образцов. Характерно, что результаты расчетов по приближенным моделям (10) и (11) практически не отличаются от результатов расчетов по точной модели (9), а с увеличением нормальной компоненты согласование с экспериментальными данными лучше.

3.4. Оценка предельного состояния по параметру долговечности. В качестве предельного состояния рассматривается зависимость между амплитудными значениями нормальных σ_a и касательных τ_a напряжений, построенная по параметру числа циклов до разрушения n_R .

Предельное состояние рассчитывается на основе приближенной модели (11), близкой по структуре к известным моделям и более точно удовлетворяющей граничным условиям при $\sigma_a = 0$ по сравнению с моделью (10). В этом случае для зависимости τ_a от σ_a при фиксированном значении n_R из (11) получим уравнение

$$\tau_a = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{\pi}{2} ((1 + q_\sigma) D_\sigma n_R)^{1/q_\sigma} \sigma_a \right]^2 + \frac{1}{24} \left[\frac{\pi}{2} ((1 + q_\sigma) D_\sigma n_R)^{1/q_\sigma} \sigma_a \right]^4 \right\}^\eta \left[\frac{1}{(1 + q_\tau) D_\tau n_R} \right]^{1/q_\tau}, \quad (23)$$

где n_R – величина фиксированная.

На рис. 7 представлены результаты сравнения расчетных диаграмм предельных напряжений по уравнению (23) с использованием приведенных в табл. 1 значений коэффициентов с экспериментальными данными, соответствующими различным значениям усталостной долговечности n_R сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов. Как видно, расчетные данные вполне удовлетворительно согласуются с экспериментальными.

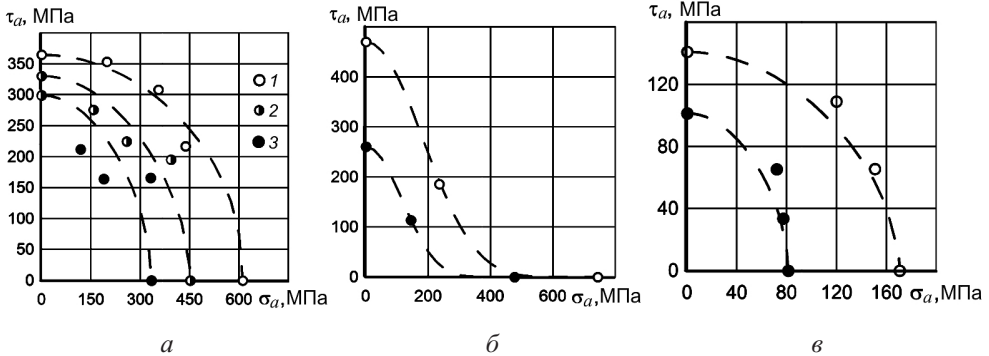


Рис. 7. Расчетные (линии) и экспериментальные (точки) диаграммы предельных напряжений сплошных цилиндрических образцов из стали SAE 4340 (а), титанового сплава ПТ-3В (б) и тонкостенных трубчатых образцов из стали 20 (в) при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и кручением: а – $n_R = 10^5$ (1), 10^6 (2), 10^7 цикл (3); б – $n_R = 7 \cdot 10^4$ (1), $2 \cdot 10^6$ цикл (3); в – $n_R = 4 \cdot 10^5$ (1), $4 \cdot 10^6$ цикл (3).

4. Обсуждение результатов. Эффективность использования степенных трансцендентных функций для построения моделей предельного состояния при двухосном циклическом нагружении обосновывается на задаче расчета предельного состояния при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и кручением. В качестве трансцендентной функции использовалась функция $\cos(\cdot)$, поскольку функция $\arccos(\cdot)$ удовлетворяет единой линеаризованной предельной диаграмме практически с такой же степенью точности. Рассчитывалось и экспериментально апробировалось предельное состояние сплошных цилиндрических и тонкостенных трубчатых образцов в абсолютной и нормированной системе координат.

Из рис. 6 и 7 следует, что результаты расчетов предельного состояния удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными. Максимальная погрешность по касательной компоненте составляет 25% и получена для образцов из стали SAE 4340, в то время как по нормальной компоненте – 20% и получена также для образцов из этой стали (рис. 7,а).

Модели предельного состояния (9) и (12), построенные с использованием степенных трансцендентных функций, позволяют повысить точность оценки предельного состояния по сравнению с моделями, построенными на основе классических критериев усталостного разрушения [1]. В качестве таких моделей можно рассматривать модель предельного состояния

$$\left(\frac{\tau_a}{\sigma_n}\right)^2 + \frac{\sigma_a}{\sigma_n} = 1, \quad (24)$$

построенную на основе критерия максимальных нормальных напряжений, модель

$$\left(\frac{2\tau_a}{\sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2 = 1, \quad (25)$$

построенную на основе критерия максимальных касательных напряжений, и модель

$$\left(\frac{\sqrt{3}\tau_a}{\sigma_n}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_a}{\sigma_n}\right)^2 = 1, \quad (26)$$

построенную на основе критерия удельной энергии формоизменения.

Модель предельного состояния (11) в соответствующей уравнениям (24)–(26) системе координат записывается в виде

$$\left(\frac{\tau_a}{\sigma_n}\right)^{1/\eta} \left(\frac{\sigma_n}{\tau_n}\right)^{1/\eta} + \frac{1}{2} \left[\frac{\pi \sigma_a}{2 \sigma_n}\right]^2 - \frac{1}{24} \left[\frac{\pi \sigma_a}{2 \sigma_n}\right]^4 = 1, \quad (27)$$

а экспериментальные данные нормируются согласно соотношению

$$\frac{\tau_a}{\sigma_n} = \left(\frac{\tau_n}{\sigma_n}\right) \left(\frac{\tau_a}{\tau_n}\right).$$

Результаты расчетов предельного состояния по уравнению (27) для сплошных цилиндрических образцов из материалов, близких к пластичным ($\nu = 0,5 \dots 0,7$) с показателем степени $\eta = 0,04 \dots 0,7$, располагаются между данными, полученными по критерию максимальных нормальных напряжений и критерию удельной энергии формоизменения, и практически совпадают с экспериментальными. Данные расчетов по моделям (24)–(26) лучше согласуются с экспериментом при использовании критерия удельной энергии формоизменения. Для образцов из титанового сплава ПТ-3В, для которого показатель степени $\eta = 6,9$, диаграммы предельных напряжений являются вогнутыми, и расчет ни по одному из критериев (24)–(26) не согласуется с экспериментом прежде всего качественно (рис. 8,б). Расчет по модели предельного состояния (27) и в этом случае удовлетворительно согласуется с экспериментом.

Аналогичные результаты получены для тонкостенных трубчатых образцов из стали StE 460 (рис. 9,а), для которой $\nu = 0,76$ и $\eta = 0,63$. Результаты расчетов по уравнению (27) также удовлетворительно согласуются с экспериментом и располагаются между данными, полученными по критерию максимальных нормальных напряжений и критерию удельной энергии формоизменения. Для образцов из стали 20, которая может рассматриваться как хрупкий материал ($\nu \cong 1,6$), результаты расчетов

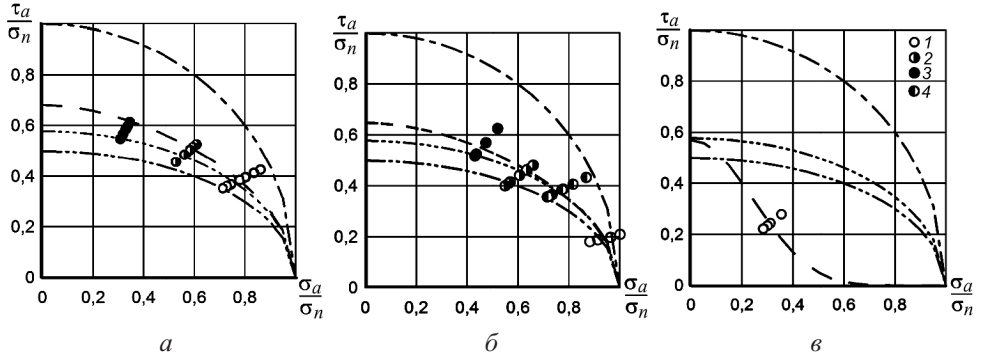


Рис. 8. Расчетные (линии) и нормированные экспериментальные (точки) диаграммы предельных напряжений сплошных цилиндрических образцов из стали SAE 4340 (а), алюминиевого сплава 76S-T61 (б) и титанового сплава ТТ-3В (в) при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и кручением: $a - \nu = 0,496$ (1), 0,868 (2), 1,782 (3); $b - \nu = 0,807$ (1), 0,5 (4), 0,732 (2), 1,807 (3); $v - \nu = 0,79$ (1). (Здесь и на рис. 9: штрихпунктирные линии – расчет по (24), штриховые с двумя и тремя пунктирами – по (25) и (26) соответственно, штриховые – по (27).)

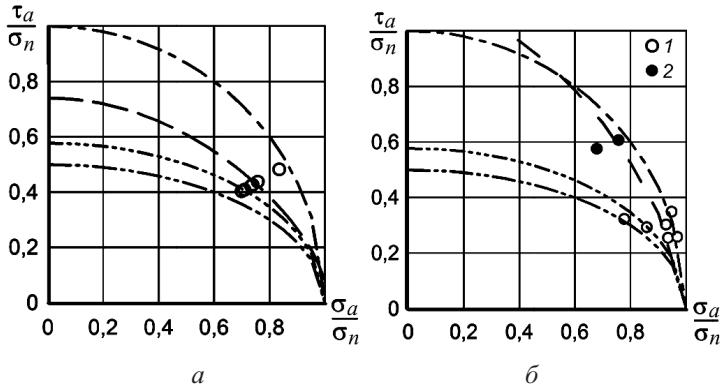


Рис. 9. Расчетные (линии) и нормированные экспериментальные (точки) диаграммы предельных напряжений тонкостенных трубчатых образцов из сталей StE 460 (а) и 20 (б) при комбинированном нагружении симметричным циклическим изгибом и кручением: $a - \nu = 0,58$ (1); $b - \nu = 0,435$ (1), 0,91 (2).

по модели (27) практически совпадают с таковыми по критерию максимальных нормальных напряжений (24) – рис. 9. Расчетные данные также удовлетворительно согласуются с экспериментальными.

Заключение. Выбор моделей предельного состояния при двухосном комбинированном симметричном циклическом нагружении в форме степенных трансцендентных функций, по-видимому, наиболее обоснован. При варьировании показателей степени модели позволяют охватить практически все формы связи между предельными значениями нормальной и касательной компонент двухосного напряженного состояния. Показатель степени зависит от свойств материала и является, по существу, дополнительной материальной константой, что дает возможность повысить точность согласования расчетных данных с экспериментальными. От геометрии и размеров образцов показатели степени практически не зависят. Модели предельного состояния, построенные на основе классических критериев усталостного разрушения, носят частный характер.

Резюме

Запропоновано точні та наближені варіанти моделей граничного стану для ізотропних металевих матеріалів за умов комбінованого навантаження симетричним циклічним згином та крутінням. У точних моделях залежність між граничними амплітудами нормальних та дотичних напружень задається степеневими трансцендентними функціями. Наближені варіанти моделей отримано з точних шляхом розкладання трансцендентних функцій в ряд та утримання в розкладанні двох та трьох членів ряду. Моделі апробовано експериментально на задачах розрахунку граничного стану суцільних циліндричних та тонкостінних трубчастих зразків. Наведено порівняння запропонованих моделей з моделями, які побудовано на основі класичних критеріїв руйнування.

1. Хэйвуд Р. Б. Проектирование с учетом усталости / Пер. с англ. под ред. И. Ф. Образцова. – М.: Машиностроение, 1969. – 504 с.
2. Серенсен С. В., Когаев В. П., Шнейдерович Р. М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. Руководство и справочное пособие / Под ред. С. В. Серенсена. – М.: Машиностроение, 1975. – 488 с.
3. Воробьев А. З., Олькин Б. И., Стебнев В. Н., Родченко Т. С. Сопротивление усталости элементов конструкций. – М.: Машиностроение, 1990. – 240 с.
4. Gough H. J. and Pollard H. V. The strength of metals under combined alternating stresses // Proc. Inst. Mech. Engrs. – 1935. – **131**. – P. 3–13.
5. Биргер И. А. Условия усталостной прочности при сложном напряженном состоянии // Прочность авиадвигателей. – 1952. – № 7. – С. 130–163.
6. Серенсен С. В. О сопротивлении усталости при сложном напряженном состоянии и симметричном цикле // Некоторые вопросы усталостной прочности стали. – М.; Л.: Машгиз, 1953. – С. 102–115.
7. Качанов Л. М. Основы механики разрушения. – М.: Наука, 1974. – 312 с.
8. McDiarmid D. L. A shear stress based critical-plane criterion of multiaxial fatigue failure for design and life prediction // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 1994. – **17**. – P. 1475–1484.
9. Голуб В. П., Крижановский В. И. К оценке предельного состояния материалов при асимметричном многоцикловом нагружении // Пробл. прочности. – 1994. – № 4. – С. 3–15.
10. Голуб В. П., Крижановский В. И. К оценке предельного состояния материалов при асимметричном циклическом нагружении и сложном напряженном состоянии // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 2. – С. 67–79.
11. Голуб В. П. Модели предельного состояния при комбинированном нагружении циклическим растяжением–сжатием и циклическим кручением // Вісн. НТУУ “КПІ”. Машинобудування. – 2013. – № 2 (68). – С. 61–69.
12. Голуб В. П., Крижановский В. И., Пельх В. Н. К задаче расчета усталостной долговечности при комбинированном нагружении циклическими растяжением–сжатием и кручением // Пробл. прочности. – 2014. – № 1. – С. 137–148.
13. Findley W. N. Fatigue of 76S-T61 aluminum alloy under combined bending and torsion // Proc. ASTM. – 1952. – **52**. – P. 818–836.
14. Шаманин Ю. А. Усталостная прочность α -титановых сплавов при синфазном действии переменных нормальных и касательных напряжений // Пробл. прочности. – 1984. – № 12. – С. 26–27.

15. *Казенина А. Д., Маневич С. Л., Филимонов Г. Н.* Сопротивление усталости конструкционных сталей при циклическом кручении с изгибом. Прочность материалов и элементов конструкций. – Л.: Изд-во Ленингр. кораблестроит. ин-та, 1985. – С. 40–46.
16. *Findley W. N., Coleman J. J., and Hanley B. C.* Theory for combined bending and torsion fatigue with data for SAE 4340 steel // Proc. of Int. Conf. on Fatigue of Metals. – London; New York, 1956. – P. 138–149, ISBN 99-0981150-2.
17. *Панфилов Ю. А.* Описание предельного состояния при переменной двухосной напряженности и его применение в расчетах. Сообщ. 1. Простое нагружение // Пробл. прочности. – 1981. – № 1. – С. 49–53.
18. *Sonsino C. M. and Kueppers M.* Multiaxial fatigue of welded joints under constant and variable amplitude loading // Fatigue Fract. Eng. Mater. Struct. – 2001. – **24**, Issue 5. – P. 309–327.
19. *Форрест П.* Усталость металлов / Пер. с англ. под ред. С. В. Серенсена. – М.: Машиностроение, 1968. – 352 с.

Поступила 27. 01. 2014