

## Имитационная динамическая модель жидкостных ракет-носителей пакетной компоновки

А. С. Конюхов

Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”, Киев, Украина

*Предложена имитационная модель для определения динамических характеристик жидкостных ракет-носителей пакетной компоновки. Методика построения динамической модели механико-гидравлической системы предполагает аппроксимацию жесткостных и инерционно-массовых параметров отсеков ракет-носителей с использованием стержневых аналогов, применение двухузловых суперэлементов для описания межблочных связей и сопряженных с ними несущих шпангоутов. Двигатели и агрегаты аппроксимируются сосредоточенными массами на жестких и упругих связях. Колеблющиеся объемы жидкости в топливных баках моделируются пружинными и маятниковыми осцилляторами. Имитационная модель адаптирована к варианту конструктивного исполнения ракеты-носителя “Циклон-4” пакетной компоновки.*

**Ключевые слова:** ракета-носитель, имитационная модель, динамические характеристики, механико-гидравлическая система, стержневой элемент, упругодеформируемые и твердые тела, жидкие массы, метод конечных элементов.

**Введение.** Одной из важнейших характеристик жидкостных ракет-носителей (РН) как объектов регулирования является спектр собственных частот колебаний: частоты управляемых движений аппарата как жесткого тела, частоты колебаний топлива в баках и колебаний конструкции на различных участках полета [1]. От соотношения этих частот зависит степень технического обеспечения устойчивости соответствующих видов движения РН, а следовательно, и степень сложности системы стабилизации. По мере увеличения массы и размеров РН, усложнения конструктивно-компоновочной схемы, в частности при переходе к пакетным схемам, спектр частот колебаний корпуса и жидких объемов становится все более плотным и смещается в низкочастотную область. Это усложняет задачу обеспечения динамической устойчивости РН, в том числе в отношении разработки эффективных имитационных моделей.

Вопросам динамики жестких и упругих тел с отсеками, частично заполненными жидкостью, посвящены работы отечественных и зарубежных авторов [2, 3]. При построении динамических моделей современных жидкостных РН используются, как правило, элементы эвристики [4, 5]. В зависимости от целей исследования принимают упрощающие предположения, которые позволяют перейти от реального объекта к имитационной модели, пригодной для анализа динамических характеристик. Принимаемые к исследованию динамические модели РН определяются в зависимости от используемых гипотез [6]. Адекватность модели устанавливается путем сравнения данных расчетного исследования, полученных для разных степеней идеализации исходного объекта.

Цель настоящей работы заключается в разработке адекватной имитационной динамической модели механико-гидравлической системы РН “Циклон-4” для нахождения и последующего анализа ее амплитудно-частотных характеристик.

**Материалы и методы.** Для создания эффективного имитационного аналога РН “Циклон-4” пакетной компоновки выделим основные элементы конструкции, определяющие динамическую модель (рис. 1). К ним, в частности, относятся отсеки

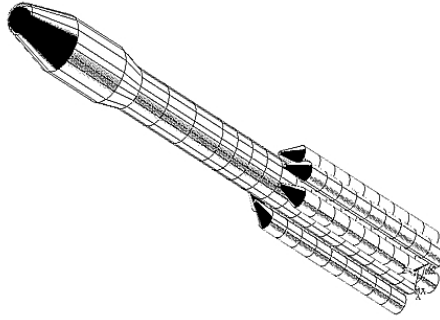


Рис. 1. Общий вид жидкостной РН пакетной компоновки с типовыми отсеками.

подкрепленных стрингерами и шпангоутами тонкостенных оболочек центрального и боковых модулей с общей продольной осью, геометрической и массовой симметрией; массивные тела (двигатели, полезный груз, адаптер, лонжероны, силовые шпангоуты и т.п.); межблочные центральные и боковые связи; жидкие массы в топливных баках цилиндрических секций и топливоподающих системах.

Считали известными геометрические, жесткостные и инерционно-массовые характеристики корпусных элементов РН, линейные размеры отсеков, толщины и геометрию обшивок, площади и моменты сечений профилей силовых наборов оболочек, приведенные инерционно-массовые характеристики массивных тел и жесткостные эквиваленты их креплений, физико-механические свойства материалов.

Предполагали, что топливные емкости модулей РН заполнены жидкостью со свободными поверхностями, а также газообразной средой, создающей давление во внутренних объемах баков. Вязкостью жидкости пренебрегали. Учитывали, что колебания жидкости приводят к деформациям тонкостенных оболочек баков.

**Схематизация упругих и жестких элементов конструкции РН.** Для аппроксимации конструктивно-неоднородных оболочек в форме тел вращения, содержащих жидкость, принимали вариант стержневой аппроксимации отсеков РН, совершающих упругие поперечные  $v(x, t)$ , продольные  $u(x, t)$  и крутильные  $\omega(x, t)$  движения. Вектор механического состояния  $\vec{Y}(\vec{r}, t)$  отсека РН представляли в виде совокупности соответствующих перемещений и скоростей:

$$\vec{Y} = \{v, \dot{v}, u, \dot{u}, \omega, \dot{\omega}\}, \quad (1)$$

где точкой обозначены частные производные по времени.

Согласно [6], матричная форма уравнений динамического равновесия в случае стержневой аппроксимации отсека РН может быть записана как

$$\frac{\partial \vec{Y}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M^v & M^{\dot{v}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M^u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M^\omega & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \dot{v} \\ u \\ \dot{u} \\ \omega \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ P_v \\ 0 \\ P_u \\ 0 \\ P_\omega \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где операторы  $M^\alpha$  ( $\alpha = v, \dot{v}, u, \omega$ ) для линейной стержневой модели определяются выражениями [3]

$$\begin{cases} M^v = \frac{1}{\rho F} \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( N \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]; \\ M^{\dot{v}} = -\frac{1}{\rho F} \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \rho J_d \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]; \\ M^u = \frac{1}{\rho F} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( EF \frac{\partial}{\partial x} \right) \right]; \\ M^\omega = \frac{1}{\rho I_d} \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( GJ_d \frac{\partial}{\partial x} \right) \right], \end{cases} \quad (3)$$

а соответствующие компоненты вектора нагрузок равны

$$\begin{cases} P_v = \frac{1}{\rho F} q_z(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} m_y(x, t); \\ P_u = \frac{1}{\rho F} q_x(x, t); \\ P_\omega = \frac{1}{\rho J_d} m_x(x, t). \end{cases} \quad (4)$$

Операторные соотношения вида (3), учитывающие сдвиг и инерцию вращения сечений балок типа Тимошенко, приведены в работе [6]. Геометрические параметры  $F$ ,  $J$ ,  $J_d$  стержневой модели отсека находим согласно формулам [7]

$$F = \oint_{\Gamma} \delta ds; \quad J = \oint_{\Gamma} \delta z^2 ds; \quad J_d = \Omega^2 / \oint_{\Gamma} \delta z^2 ds = 2S, \quad (5)$$

где  $\Gamma$  – контур, образованный средней линией профиля сечения отсека;  $\Omega$  – секториальная площадь;  $s$  – длина дуги  $\Gamma$ ;  $S$  – площадь, заключенная внутри контура  $\Gamma$ ;  $\delta$  – толщина профиля.

Уравнения (2) дополним граничными условиями (ГУ) общего вида на концах эквивалентного стержня ( $x = x_i, i = 1, 2$ ):

$$M^{i\alpha} \bar{Y} \Big|_{x_i} = \bar{P}_i. \quad (6)$$

Вид операторов  $M^{i\alpha}$ , соответствующих различным ГУ стержневой аппроксимации, приведен в таблице.

Некоторые другие варианты ГУ, которые отвечают условиям сопряжения отсеков и других конструктивных элементов РН, приведены в [8].

Начальные условия для уравнений (2) состоят в задании вектора механического состояния эквивалентного стержня при  $t = t_0$ :

$$\bar{Y}(x, t) \Big|_{t=t_0} = \bar{Y}^0(x). \quad (7)$$

Для учета в имитационной динамической модели РН массивных конструктивных элементов (автомат стабилизации, силовые шпангоуты, двигатели и др.) использовали пружинно-массовые аналоги. Каждый элемент РН такого типа аппроксимиро-

вали жестким телом с известными инерционными характеристиками. Узлы крепления массивных элементов к силовому набору РН в соответствии с конструктивным исполнением заменили эквивалентными безмассовыми пружинами по направлениям обобщенных координат. Общий случай соответствует пружинной аппроксимации узлов крепления по трем линейным и трем угловым степеням свободы (рис. 2).

Граничные условия стержневой модели

Защемление	$M^{1v} = 1$	$M^{2v} = \frac{\partial}{\partial x}$
Шарнирное опирание	$M^{1v} = 1$	$M^{2v} = EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2}$
Свободный край	$M^{1v} = EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	$M^{2v} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EJ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$
Неподвижен	$M^u = 1$	$M^w = 1$
Свободен	$M^u = EF \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	$M^w = GJ_d \frac{\partial}{\partial x}$

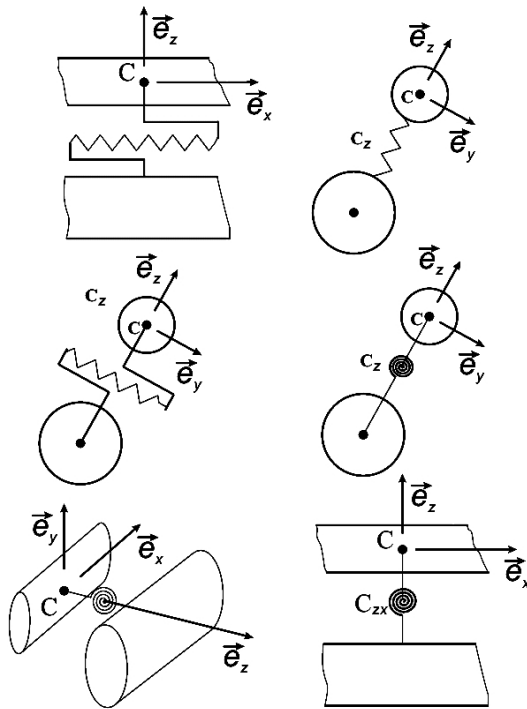


Рис. 2. Аппроксимация видов жестких связей массивного элемента конструкции с отсеком модуля РН для линейных и угловых степеней свободы.

Для описания инерционных характеристик массивных элементов в динамической модели использовали диагональную матрицу, содержащую значения масс и моментов инерции твердотельных аналогов:

$$[M] = \text{diag} [M_x \quad M_y \quad M_z \quad J_{xy} \quad J_{yz} \quad J_{zx}]. \quad (8)$$

В свою очередь, жесткостные характеристики эквивалентных пружин в направлении линейно независимых обобщенных координат, образующих собственный локальный базис, также представляли в виде диагональной матрицы

$$[C] = \text{diag} [C_x \quad C_y \quad C_z \quad C_{xy} \quad C_{yz} \quad C_{zx}]. \quad (9)$$

Если для описания механического состояния массивных элементов конструкции РН ввести аналогично (1) блочный вектор линейных и угловых перемещений и скоростей в базисе собственных векторов

$$\vec{Y} = \left\{ \begin{matrix} \{u_x\} & \{u_y\} & \{u_z\} & \{\theta_{xy}\} & \{\theta_{yz}\} & \{\theta_{zx}\} \\ \{\dot{u}_x\} & \{\dot{u}_y\} & \{\dot{u}_z\} & \{\dot{\theta}_{xy}\} & \{\dot{\theta}_{yz}\} & \{\dot{\theta}_{zx}\} \end{matrix} \right\}^T, \quad (10)$$

то уравнение динамического равновесия данного элемента может быть представлено в виде (2):

$$\frac{\partial \vec{Y}_j}{\partial t} = [M]_j \vec{Y}_j + \vec{F}_j, \quad j = 1, 2, \dots, 6, \quad (11)$$

где

$$\vec{Y}_j = \begin{Bmatrix} u_\alpha \\ \dot{u}_\alpha \end{Bmatrix}, \quad [M]_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C_\alpha/M_\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_\alpha/M_\alpha \end{Bmatrix} \quad \text{для } j = 1, 2, 3$$

и  $\alpha = x, y, z$ ;

$$\vec{Y}_j = \begin{Bmatrix} \theta_{\alpha\beta} \\ \dot{\theta}_{\alpha\beta} \end{Bmatrix}, \quad [M]_j = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C_{\alpha\beta}/J_{\alpha\beta} & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{F}_j = \begin{Bmatrix} 0 \\ m_{\alpha\beta}/J_{\alpha\beta} \end{Bmatrix} \quad \text{для } j = 4, 5, 6,$$

где  $\alpha\beta = xy, yz, zx$ ;  $f_\alpha$  и  $m_{\alpha\beta}$  – величины сил и моментов, отвечающие первой и второй тройке компонент вектора  $F_j$ .

Отметим, что некоторые массивные элементы конструкции РН следует рассматривать в рамках модели деформируемого твердого тела. Так, для кассет с полезным грузом и подвесных баков целесообразна аппроксимация элементами упругих балок с заданными геометрическими, жесткостными и инерционными характеристиками. При этом связь с силовым набором отсеков РН, как и в случае жесткотельных массивных элементов, может быть реализована посредством введения эквивалентных безмассовых пружин для шести (трех линейных и трех угловых) степеней свободы, аппроксимирующих узлы крепления в сечениях силовых шпангоутов (рис. 2), либо пружинно-массового слоя (рис. 3).

Для описания межблочных связей центрального и боковых модулей РН предлагается использовать двуузловые пружинно-массовые аппроксимации [6]. Узел связи, расположенный между поверхностями сопряжения в точках  $A$  и  $B$  (рис. 3), интерпретировали как упругий инерционный (массовый) слой в общем случае с неоднородными свойствами, для которого уравнения статического равновесия имеют вид

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} \\ K_{BA} & K_{BB} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_A \\ f_B \end{Bmatrix}, \quad (12)$$

где  $[K_{AA}]$ ,  $[K_{BB}]$ ,  $[K_{BA}] = [K_{AB}]$  – блоки коэффициентов размерами  $6 \times 6$  матрицы жесткости  $[K_{AB}]$  слоя;  $\{u_{AB}\} = \{u_A \quad u_B\}^T$  – вектор перемещений (линейные и

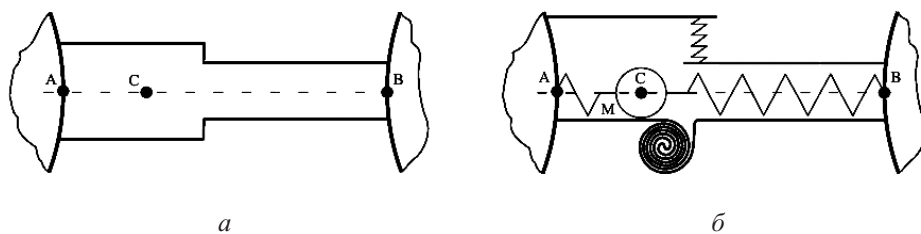


Рис. 3. Элемент узла межблочной связи (а) и его аппроксимация (б) в плоском случае.

узловые) размером  $1 \times 12$ ;  $\{f_{AB}\} = \{f_A \quad f_B\}^T$  – вектор внешних нагрузок (силовые и моментные), приведенных к узлам  $A$  и  $B$  размером  $1 \times 12$ .

Инерционные характеристики элементов конструкций узлов межблочных связей относятся к центру масс. Вычисленные моменты инерции и эквивалентные величины сосредоточенных масс представляются в виде диагональной матрицы масс аналогично (8).

**Учет движения жидких масс в баках РН.** При построении имитационных динамических моделей движущихся жидких объемов, оказывающих влияние на характеристики собственных колебаний РН, полагали, что колебания баков с топливом и элементов системы наддува газом взаимосвязаны. Механизм гидромеханического взаимодействия жидкости и стенок баков больших объемов зависит от форм движений данной системы в поле массовых сил. При поперечных формах колебаний топливных емкостей РН имеют место движения масс жидкости только вблизи свободной поверхности в баках. Остальная ее часть является малоподвижной (“квази-затвердевшей”) [2, 8]. Кроме колебаний поверхностного слоя жидкости в баках ее общая масса перемещается относительно стенок последних в продольном направлении РН. Колебания баков и жидкости в них в данном направлении являются совместными. В гравитационном поле масса жидкого топлива создает гидростатическое давление на корпус бака через упругое днище и тем самым обуславливает его деформационное растяжение. От величин перемещений днищ баков модулей РН зависит изменение давления жидкости, что оказывает воздействие на продольные колебания баков и, как следствие, на модули РН. Крутильные формы движения жидкости в баках обусловлены главным образом ее вязкими свойствами.

При построении динамической модели совершающих колебаний жидких объемов вводили допущения [6] о формах их движений в несущих и подвесных баках модулей РН [2, 3]. Продольные и поперечные (по отношению к продольной оси РН) движения жидкой среды в баках рассматривали как независимые [9], а крутильными формами движения пренебрегали ввиду наличия конструктивных демпфирующих устройств в баках и малой вязкости компонент топлива.

Для описания продольных колебаний жидких масс в цилиндрических баках с упругим днищем применяли пружинно-массовую модель в виде эквивалентной системы  $n$  осцилляторов, упруго закрепленных на продольной оси бака (рис. 4).

Точка привязки пружин в сечениях стержневой модели отсеков модулей РН соответствует опорным шпангоутам днищ баков. Масса одного осциллятора принималась эквивалентной массе жидкости для соответствующего тона колебаний в баке, а сумма масс всех осцилляторов равна общей массе жидкости в баке. При этом колебания эквивалентного осциллятора относительно жесткого дна соответствуют упругим перемещениям центра дна бака относительно силового шпангоута.

Характеристики податливости пружин эквивалентных механических осцилляторов могут быть определены из условий равновесия системы жидкость–деформируемые поверхности баков [2, 3]. За основу принимаются величины деформаций

днища и обечаек цилиндрических баков РН под действием статических сил [10], пропорциональных эквивалентным массам жидкости каждого тона колебаний и давлению наддува.

Для учета влияния приповерхностных движений жидкости на характеристики поперечных колебаний модуля РН также применяли динамическую пружинно-массовую модель в виде упруго закрепленных на корпусе емкости  $n$  масс (рис. 5), эквивалентных по частоте и силовому воздействию на стенки емкости динамическим характеристикам  $n$ -го тона колебаний жидкости со свободной поверхностью.

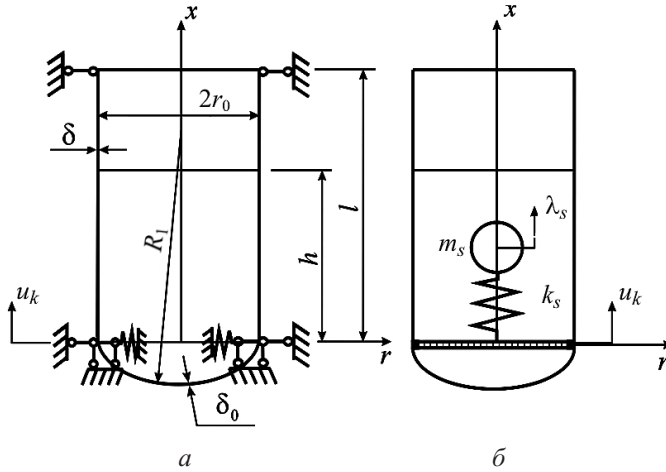


Рис. 4. Упругая цилиндрическая оболочка бака РН со сферическим днищем, частично заполненная жидкостью (а), и имитационная модель  $s$ -го тона продольных колебаний при возмущенном движении  $u_k(t)$  силового шпангоута (б).

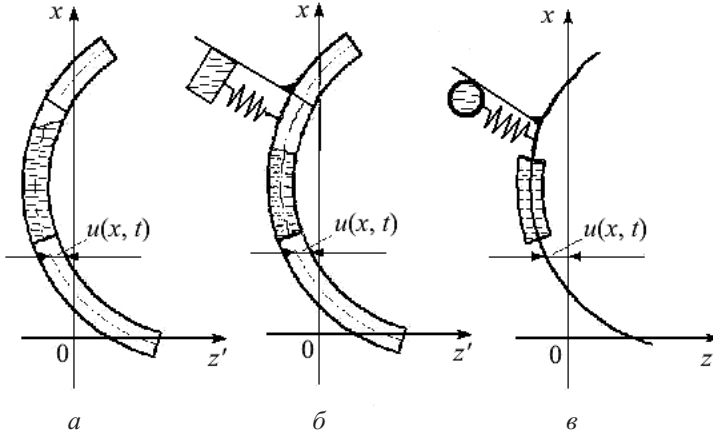


Рис. 5. Поперечные колебания модуля РН с подвижными жидкими массами: а – схема модуля РН с топливным баком, заполненным жидкостью; б – схема бака с эквивалентным пружинно-массовым осциллятором для подвижной и “квасизатвердевшей” массы жидкости; в – эквивалентный стержень с пружинно-массовым осциллятором для подвижной и “квасизатвердевшей” массы жидкости.

В используемой пружинно-массовой модели (механический аналог колебаний приповерхностного объема жидкости [3, 6]) принимали следующие допущения: масса  $n$ -го груза равна приведенной массе  $n$ -го тона колебаний жидкости; частота колебаний  $n$ -го груза равна частоте  $n$ -го тона колебаний жидкости; координата креп-

ления пружины  $n$ -го груза к стенке бака расположена на расстоянии  $x_n$  от свободной поверхности (в точке приложения равнодействующих поперечных сил при колебаниях жидкости по  $n$ -му тону).

В имитационной модели каждый эквивалентный стержень отсека РН, соответствующий баку с жидкостью, дополняли присоединенными к нему механическими осцилляторами, моделирующими колебания объемов жидкости вблизи свободной поверхности на различных частотах. С учетом установленного уменьшения в  $\sim 20$  раз приведенной массы жидкости для второго тона колебаний [6] в динамической пружинно-массовой аппроксимации ограничились двумя эквивалентными массами.

Жидкие объемы, не совершающие движений относительно стенок и не увеличивающие изгибной жесткости системы жидкость–бак, учитывали путем введения погонной массы “квасизатвердевшей” жидкости и последующего суммирования с ней массы эквивалентных стержней динамических моделей отсеков РН.

Топливные трубопроводы, имеющие относительно большой диаметр при малой толщине стенок, обладают, как и узлы их креплений (связи), незначительной жесткостью. Поэтому в имитационной модели РН учитывали только их массовые характеристики. Погонную массу трубопровода с “затвердевшей” жидкостью принимали во внимание при вычислении эквивалентных распределенных и сосредоточенных масс для соответствующих стержневых аппроксимаций РН.

**Имитационная динамическая модель РН “Циклон-4”.** Разработанные аналоги основных структурных элементов жидкостных РН использовали для построения динамических схем РН “Циклон-4” пакетной компоновки для случаев продольных и поперечных собственных колебаний (рис. 6).

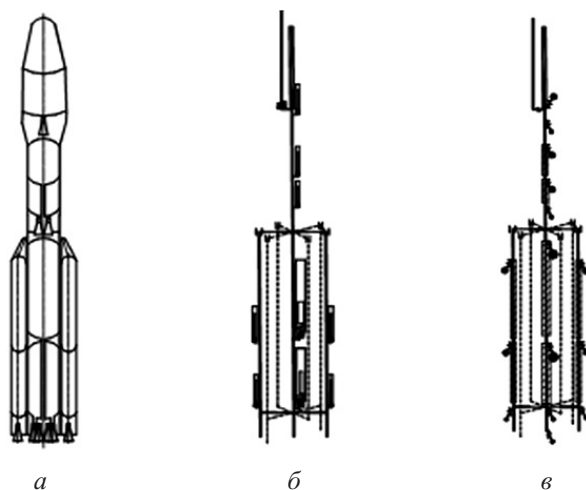


Рис. 6. Схема РН “Циклон-4” пакетной компоновки (а), динамическая модель продольных (б) и поперечных (в) колебаний РН.

Имитационную динамическую модель РН “Циклон-4” представляли в виде пространственного пакета из семи связанных между собой изначально ненапряженных кусочно-неоднородных стержневых элементов, жесткостные и инерционные свойства которых эквивалентны различным отсекам центрального и шести боковых блоков РН, а также корпуса обтекателя.

Упругий неоднородный стержень центрального блока РН и обтекатель в соответствии с общим количеством отсеков задавали в виде совокупности 53 элементов балочного типа с однородными свойствами, а различные отсеки каждого из четырех подвесных модулей и двух подвесных баков – 30 однородными балочными элемен-



тами. Кассету с полезным грузом аппроксимировали элементом упруго присоединенной балки постоянного поперечного сечения. По разработанным численно-аналитическим методикам находили приведенные характеристики элементов балочного типа для различных отсеков модулей РН (длина, погонные массы, погонные моменты инерции сечений, жесткости при растяжении–сжатии, изгибе, сдвиге и кручении в направлении линейно независимых координат).

Для массивных элементов конструкции сопряжения блоков РН с заданными кинематическими ограничениями в верхнем и нижнем силовых поясах применяли двуузловые пружинно-массовые аппроксимации. Эквивалентные жесткостные и инерционные характеристики для конструктивных элементов креплений, составляющих узел связи, определяли раздельно.

Предполагали наличие жестких связей силовых шпангоутов с отсеками РН. Эквивалентные инерционно-массовые характеристики силовых шпангоутов, вычисленные по стандартным методикам с использованием формул (5), а также аналогичные характеристики по автомату стабилизации применяли в качестве исходных данных для их аппроксимационной модели типа “жестко закрепленная масса”.

Сопряжения блоков РН моделировали упруго-массовыми связями с заданными кинематическими ограничениями в верхнем и нижнем силовых поясах. Жесткостные и инерционные характеристики для аппроксимирующих элементов связей устанавливали согласно приведенной выше методике расчета.

Инерционные характеристики двигателя с подвеской определяли в соответствии с конструкционным исполнением конкретного узла РН, а упругие характеристики подвески находили для линейных составляющих перемещений центра тяжести двигателя.

Погонную массу трубопровода с “затвердевшей” жидкостью принимали во внимание при вычислении эквивалентных массовых характеристик для соответствующих стержневых аппроксимаций отсеков РН.

Согласно принятым гипотезам о формах движения топлива в несущих и подвесных баках модулей РН применяли динамическую модель колебаний жидких масс, которая учитывает схему аппроксимации форм продольных и поперечных колебаний эквивалентных стержней балочного типа. Объемы заполнения топливных баков РН жидкими массами для произвольного времени (фазы) полета определяли по известным расходам топлива в двигателях.

## Выводы

1. Континуализация механико-гидравлической системы РН “Циклон-4” проведена на основе разработанных прототипов-аналогов ее основных структурных элементов. Приведены аналитические соотношения для аппроксимации отсеков РН элементами балочного типа.

2. Детально описана динамическая схема стержневой аппроксимации жидкостных ракетносителей пакетной компоновки и реализована на примере РН “Циклон-4” в виде пространственного пакета связанных между собой изначально ненапряженных кусочно-неоднородных стержневых элементов с дополнительными пружинно-массовыми связями.

## Резюме

Запропоновано імітаційну модель для визначення динамічних характеристик рідинних ракет-носіїв пакетного компонування. Методика побудови динамічної моделі механіко-гідравлічної системи припускає апроксимацію жорсткісних та інерційно-масових параметрів відсіків ракет-носіїв стержневих аналогів, використання двоузлових суперелементів для опису міжблокових зв'язків і сполучних із ними несів-

них шпангоутів. Двигуни й агрегати апроксимуються зосередженими масами на жорстких і пружних зв'язках. Об'єми рідини в топливних баках моделюються пружинними і маятниковими осциляторами. Імітаційну модель адаптовано до варіанту конструктивного виконання ракети-носія "Циклон-4" пакетного компонування.

1. *Ракеты-носители. Проекты и реальность: Справ. пособие: В 2 кн. Кн. 1: Ракеты-носители России и Украины / В. Н. Блинов, Н. Н. Иванов, Ю. Н. Сеченов, В. В. Шалай.* – Омск: Изд-во ОГТУ, 2011. – 380 с.
2. *Микишев Г. Н., Рабинович Б. И.* Динамика тонкостенных конструкций с отсеками, содержащими жидкость / Под ред. А. Ю. Ишлинского. – М.: Машиностроение, 1971. – 564 с.
3. *Колесников К. С.* Динамика ракет. – М.: Машиностроение, 1980. – 376 с.
4. *Аврамов К. В., Филипповский С. В., Пирог В. А. и др.* Свободные изгибно-изгибно-продольные колебания ракеты-носителя с космическим аппаратом // Опытные информ. и компьютерные интегрированные технологии. – 2010. – № 45. – С. 136–140.
5. *Цыбенко О. С., Крищук М. Г., Конюхов О. С. и др.* Розробка адекватної математичної моделі дослідження динаміки стулок головного обтічника ракети-носія у процесі польоту і відділення // Наук. вісті НТУУ "КПІ". – 2006. – № 6. – С. 139–148.
6. *Цыбенко А. С., Конюхов А. С.* Имитационные динамические модели жидкостных РН. – Киев: НТУУ "КПИ", 2008. – 230 с.
7. *Розин Л. А.* Стержневые системы как системы конечных элементов. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1976. – 236 с.
8. *Рабинович Б. И.* Введение в динамику ракет-носителей космических аппаратов. – 2-е изд., перераб. – М.: Машиностроение, 1983. – 296 с.
9. *Василенко Н. В.* Теория колебаний. – Киев: Вища шк., 1992. – 430 с.
10. *Писаренко Г. С.* Сопrotивление материалов. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.

Поступила 21. 11. 2014