

Згин композитної балки з поздовжнім розрізом

В. І. Шваб'юк, С. В. Ротко, О. А. Ужегова

Луцький національний технічний університет, Луцьк, Україна

У рамках неklasичної моделі композитних балок отримано аналітичний розв'язок для балки з поздовжнім розрізом, колінеарним до її серединної лінії. Згинальне навантаження на балку сприяє розкриттю розрізу. Отримано елементарні формули для напруження і переміщення у всіх частинах балки. Точність результатів підтверджується шляхом порівняння з відповідними даними, отриманими при розв'язанні плоскої задачі теорії пружності методом граничних елементів.

Ключові слова: поздовжній розріз, композитна балка, неklasична модель, поперечний зсув, обтиснення, однонаправлений графітопластик.

Вступ. Проблема дослідження згину балок і пластин, послаблених внутрішніми розрізами або тріщинами, висвітлена у багатьох літературних джерелах [1–4]. Зокрема, в [2] розглянуто напружено-деформований стан анізотропної балки з нахиленою тріщиною. У роботах [1, 5, 6] із використанням методу лінійного спряження розв'язуються задачі для ортотропної балки – смуги з поперечною тріщиною. Поперечні й поздовжні наскрізні тріщини у циліндричних оболонках розглянуто у роботах [7–9 та ін.]. Циліндричний та осесиметричний згин пластин із внутрішніми тріщинами у постановці класичної теорії згину досліджено у роботах [10, 11], де пластина розбивалася на дві зони (із тріщиною, що має “пакетну” жорсткість, та без тріщини), які між собою “зшивалися” граничними умовами. Із використанням неklasичної моделі подібні задачі розв'язувалися раніше [12, 13]. Вважалося, що береги тріщини контактують, а контактний тиск між ними відомий. Останнє дозволило знаходити не тільки переміщення, а й напруження у кожній з частин пластини.

У даній роботі розглядається згин композитної балки, послабленої внутрішнім поздовжнім розрізом, колінеарним до серединної лінії (поверхні). Навантаження діє таким чином, що розріз у балці розкривається, і контактна напруга на її поверхні відсутня. Задача розв'язується за допомогою рівнянь неklasичної моделі згину коротких балок, що враховують поперечний зсув та обтиснення.

Постановка задачі. Розрахункові рівняння. Композитна балка довжиною $2L$, товщиною $2h$ й шириною t знаходиться під дією розподіленого по поверхні $z = h$ навантаження q (рисунк, а). На відстані $h_0 \in [0; h]$ від нижньої поверхні вона має наскрізний поздовжній розріз довжиною $2l$, що знаходиться паралельно до серединної поверхні. Будемо вважати, що за такого способу навантаження поверхні розрізу вільні від контактних навантажень.

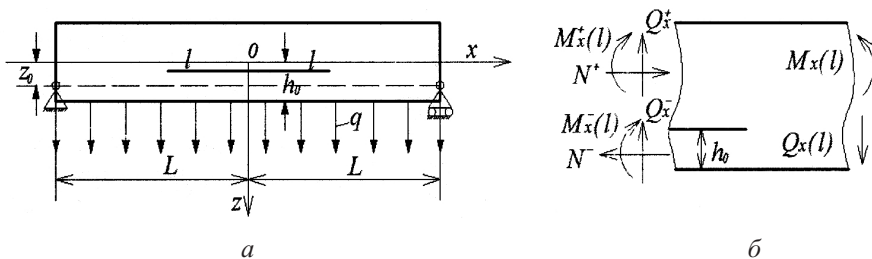


Схема навантаження балки.

Для розв'язання поставленої задачі скористаємося методикою, яку використовували в аналогічних задачах за циліндричного й осесиметричного згину плит [12, 13], де розріз знаходився під дією контактної тиску на його поверхнях. Це дозволяє дослідити напружено-деформований стан та задовольняти граничні умови для кожної з частин балки, що утворилися, як по її циліндричній поверхні за лінією розділу областей, так і на лицьових поверхнях частин балки, включаючи поверхні над і під розрізом (рисунок, б).

При розв'язуванні поставленої задачі будемо використовувати розрахункові рівняння неklasичної моделі згину коротких балок [14], де, зокрема, вирази для напружень σ_x^i , σ_z^i ($i \Leftrightarrow \pm$) і переміщень $U^i(x, z_i)$, $W^i(x, z_i)$ у розділених розрізом верхньої ($i \Leftrightarrow +$) і нижньої ($i \Leftrightarrow -$) частин балки мають такий вигляд:

$$\sigma_x^i = \frac{N_x^i}{2th_i} + \frac{M_x^i}{I_i} z_i + \frac{z_i \alpha^2}{3I_i} (z_i^2 - 0,6h_i^2) \left(q^i - 0,5q'' h_i^2 \frac{G'}{E'} \right); \quad q^i = q^- = q; \quad (1)$$

$$\tau_{xz_i} = \frac{3Q_x^i}{4th} (1 - z_i^2/h_i^2); \quad \sigma_z^- = \frac{q}{2t} + \frac{q}{2t} \left(3 - \frac{4(z^-)^2}{h_0^2} \right) \frac{z^-}{h_0}; \quad -\frac{h_0}{2} \leq z^- \leq \frac{h_0}{2};$$

$$U^i(x, z_i) = u^i(x) + z_i \gamma_x^i - \frac{5\varepsilon_2}{3h_i^2} \left(\frac{dw_\tau^i}{dx} + \frac{3h_i}{8tE'} \frac{dq'}{dx} \right) (z_i^2 - 0,6h_i^2) z_i; \quad (2)$$

$$W^i(x, z_i) = w^i(x) + \frac{1}{2} \left(\frac{q}{t} - \frac{v' N_x^i}{th_i} \right) \frac{z_i}{E'} + v'' \frac{d^2 w^i}{dx^2} \frac{z_i^2}{2} + \frac{z_i^2 q}{8E' th_i} B(z_i),$$

де

$$\gamma_x^i = (1 - \varepsilon_2) \frac{dw_\tau^i}{dx} - \frac{d\tilde{w}}{dx}; \quad \alpha^2 = \frac{E}{2G'} - v''; \quad \varepsilon_1 = 0,1(4E/G' - 3v'');$$

$$\varepsilon_2 = 0,2(1 - v' G'/E'); \quad B(z_i) = 6A_2 - A_3 \frac{z_i^2}{h_i^2}; \quad A_2 = \alpha_0 + \frac{v'E}{2G'};$$

$$A_3 = A_2 - 0,5v'v''; \quad \tilde{w} = w^i(x) + 1,5\varepsilon_2 q_2^i h_i / 4tE'; \quad \alpha_0 = 0,5(1 - v'v'');$$

M_x^i , N_x^i , Q_x^i – згинальний момент, подовжня та поперечна сили у поперечних перерізах балки відповідно,

$$M_x^i = t \int_{-h_i}^{h_i} z_i \sigma_x^i dz_i = EI_i \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} - \varepsilon_1 h_i^2 q^i; \quad N_x^i = t \int_{-h_i}^{h_i} \sigma_x^i dz_i = 2Eth_i \frac{du^i}{dx} + h_i v'' q;$$

$$Q_x^i = K'_i \frac{dw_\tau^i}{dx}; \quad K'_i = 4G' th_i / 3; \quad I_i = \frac{2}{3} th_i^3;$$

I_1 – жорсткість частини балки під розрізом, $I_1 = I_1^- + I_1^+ = \delta I$; $EI_1^- = \beta^3 EI$; $EI_1^+ = \delta I - 3\beta + 3\beta^2$; $\beta = h_0/2h$; EI_2 – жорсткість суцільної частини балки без розрізу, $EI_2 \equiv \equiv EI = 2th^3/3$; z^- – змінна координата частини плити під розрізом, $z^- = z - h + h_0/2$;

u^i, w^i – тангенціальне і вертикальне переміщення середніх ліній частин балки у напрямку осей x і z ; E, G', E', ν' – модулі пружності і коефіцієнт Пуассона матеріалу балки у поздовжньому і поперечному (із двома штрихами) напрямках; w_τ^i – зсувна складова вертикального переміщення середньої лінії відповідної частини балки.

Необхідно зауважити, що початок системи координат (x, z_i) знаходиться посередині кожної з частин балки (на середній лінії), де вісь z_i спрямована вниз. Характеристики без індексу i відносяться до суцільної частини балки.

Розрахункові диференціальні рівняння відносно переміщень $u^i(x), w^i(x)$ і $w_\tau^i(x)$ мають вигляд [14]:

$$\frac{d^2 u^i}{dx^2} = -\frac{\nu'}{2E'} \frac{dq^i}{dx}; \quad K_i' \frac{d^2 w_\tau^i}{dx^2} = -q^i; \quad (3)$$

$$\frac{d^4 w^i}{dx^4} = \frac{q^i}{EI_i} - \frac{\varepsilon_1 h_i^2}{EI_i} \frac{d^2 q^i}{dx^2} - \frac{\varepsilon_2 h_i^4}{4E'I_i} \frac{d^4 q^i}{dx^4}. \quad (4)$$

З одержаних рівнянь рівноваги видно, що за сталого навантаження q похідні у правих частинах зникають, тому можна вважати, що у цьому випадку ортотропія матеріалу не впливає на базову систему диференціальних рівнянь і вони збігаються, за винятком другого рівняння (3), де повинно було б бути $w_\tau^i \equiv 0$, з відповідними рівняннями класичної теорії тонких стрижнів Бернуллі–Ейлера, що не враховують деформацій поперечного зсуву й обтиснення.

Отримання розв'язків системи рівнянь. Розв'язки системи рівнянь (3), (4) будемо шукати окремо для кожної частини балки, задовольняючи відповідним граничним умовам. При цьому використовували методику “зшивання” розв'язків для кожної частини з урахуванням умови симетрії задачі.

Зокрема, для області $|x| > l$ маємо

$$w = C_0 + C_2 x^2 + q x^4 / (24EI); \quad w_\tau = C_\tau - q x^2 / (2K'); \quad u = C_{1u} x + C_u. \quad (5)$$

Для області $|x| \leq l$, якщо це стосується нижньої частини балки під розрізом, відповідні переміщення (5) мають такий вигляд:

$$w^- = C_0^- + C_2^- x^2 + q x^4 / (24EI^-); \quad w_\tau^- = C_\tau^- - q x^2 / (2K'_-); \quad u^- = C_{1u}^- x + C_u^-, \quad (6)$$

де сталі $C_0, C_2, C_\tau, C_u, C_{1u}, C_0^-, C_2^-, C_\tau^-, C_u^-, C_{1u}^-$ знаходяться з граничних умов на краю балки $x = L$:

$$w(L) = M_x(L) = N_x(L) = 0; \quad Q_x(L) = -qL \quad (7)$$

та умов зшивання на межі області появи розрізу $x = l$ для верхньої або нижньої частин балки.

Наприклад, для нижньої частини балки маємо:

$$\begin{cases} w^-(l) = W(l, h - h_0/2); & u^-(l) = U(l, h - h_0/2); & \sigma_x^-(l, \beta h) = \sigma_x(l, h); \\ N_x^-(l) = t \int_{h-h_0}^h \sigma_x(l, z) dz; & \sigma_x^-(x, z^-) = \frac{N_x^-}{th_0} + \frac{M_x^-}{I^-} z^- + \frac{\alpha^2 z^- q}{3I^-} ((z^-)^2 - 0,15h_0^2); \end{cases} \quad (8a)$$

$$\begin{cases} N_x^- = Eth_0 \frac{du^-}{dx} + 0,5h_0 v'' q; & M_x^- = -EI^- (\tilde{w}^-)'' - 0,25\varepsilon_1 h_0^2 q; \\ Q_x^-(l) = Q_x(l) = -ql; & z^- = z - h + h_0/2. \end{cases} \quad (8)$$

Задовольняючи граничним умовам (7), отримуємо значення коефіцієнтів C_0 , C_2 , C_τ , C_{1u} та вирази для згинального моменту M_x й переміщень w і w_τ в області балки без розрізу:

$$\begin{cases} C_0 = 5qL^4/(24EI) + q\varepsilon_1 L^2 h^2/(2EI); & C_2 = -qL^2(1 + 2\varepsilon_1 h^2/L^2)/(4EI); \\ C_\tau = qL^2/(2K'); & C_{1u} = -v''q/(2E); & M_x = q(L^2 - x^2)/2; \\ w = q(x^4 - L^4)/(24EI) + qL^2(L^2 - x^2)(1 + 2\varepsilon_1 h^2/L^2)/(4EI); \\ Q_x(x) = -qx; & w_\tau = q(L^2 - x^2)/(2K'). \end{cases} \quad (9)$$

З умов (8) знаходимо інші невідомі коефіцієнти:

$$\begin{cases} C_0^- = W(l, h - h_0/2) - C_2^- l^2 - ql^4/(24EI^-); \\ C_2^- = -(2M_x^-(l) + ql^2 + 2\varepsilon_1 q\beta^2 h^2)/(4EI^-); \\ C_u = \left(C_{1u}^- + \frac{v''q}{2E} \right) l + \frac{qlhL^2}{2EI} \left(\frac{l^3}{3L^2} - 2\varepsilon_1 \frac{h^2}{L^2} - 1 \right) (1 - \beta) + \frac{ql}{4tG'} f(\beta); \\ C_{1u}^- = N_x^-(l)/(Eth_0) - 0,5v''q/E; & C_u^- = 0; & f(\beta) = (1 - \beta)[2 + 2\beta - \beta^2]; \\ M_x^-(l) = \beta^3 M_x(l) - 2qh^2\alpha^2\beta^2(1 - \beta)(0,2 - \beta + \beta^2)/3; \\ N_x^-(l) = 3\beta(1 - \beta)M_x(l)/h + 2\beta(1 - \beta)(0,2 - \beta + \beta^2)q\alpha^2 h. \end{cases} \quad (10)$$

Основні співвідношення. Таким чином, виходячи з формул (8)–(10), основні зусилля та згинальний момент для частини балки під розрізом будуть мати вигляд:

$$N_x^-(x) \equiv N_x^-(l); \quad Q_x^-(x) = -qx; \quad M_x^-(x) = M_x^-(l) + q(l^2 - x^2)/2. \quad (11)$$

Поздовжні сили в частинах балки ($x \leq l$) над і під розрізом вважаються рівними за величиною і оберненими за знаком: $N_x^-(x) = -N_x^+(x)$. Окрім того, граничні згинальні моменти $M_x^+(l)$, $M_x^-(l)$ та поздовжні сили $N_x^+(l)$, $N_x^-(l)$ в частинах балки над і під розрізом мають задовольняти рівнянню рівноваги моментів у перерізі балки в околі розрізу (рисунк,б):

$$M_x^+(l) + M_x^-(l) + dN_x^-(l) = M_x(l), \quad (12)$$

де d – деяка відстань між точками прикладання поздовжніх сил до поперечних перерізів частин балки, яку за лінійного розподілу нормальних напружень σ_x можна вважати рівною $d \cong h$.

Необхідно зауважити, що у рівняння рівноваги моментів (12) входить член, який враховує вплив поздовжніх сил. Він не брався до уваги Г. П. Черепановим у його “Общей теории расслоения многослойных оболочек” [4], оскільки там відстань d і товщина пластини $2h$ вважалися значно меншими за лінійний розмір розрізу ($2h, d \ll l$).

Величину граничного згинального моменту $M_x^+(l)$ для верхньої частини балки ($x \leq l$) знайдемо з граничної умови рівності нормальних напружень на зовнішній ($z = -h$) поверхні балки:

$$\sigma_x^+(l, -h(1-\beta)) = \sigma_x(l, -h). \quad (13)$$

Тут вирази для цих напружень шукаються за формулою (1) у місцевих координатах (z_B, r):

$$\sigma_r^+(r, z_B) = \frac{N_r^+}{2h(1-\beta)} + \frac{M_r^+}{I^+} z_B, \quad (14)$$

де z_B – координата локальної системи координат для частини балки над розрізом, що направлена вниз від її серединної поверхні, $z_B = z + \beta h$.

Враховуючи (14), з умови (13) знаходимо

$$M_x^+(l) = (1-\beta)^3 M_x(l) + 2(1-\beta)^3 (0,2 + \beta^2) q h^2 \alpha^2 / 3. \quad (15)$$

Для області $|x| \leq l$ у верхній частині балки над розрізом відповідні розв'язки рівнянь (3), (4) для переміщень (6) можна шукати у вигляді

$$w^+ = C_0^+ + C_2^+ x^2; \quad w_\tau^+ = C_\tau^+; \quad u^- = C_{1u}^+ x + C_u^+. \quad (16)$$

Умови для знаходження невідомих коефіцієнтів у виразах (16) аналогічні таким у (8), тобто:

$$w^+(l) = W(l, -\beta h); \quad u^+(l) = U(l, -\beta h); \quad N_x^+(l) = t \int_{-h}^{h-h_0} \sigma_x(l, z) dz, \quad (17)$$

звідки знаходимо

$$\begin{aligned} C_0^+ &= W(l, -\beta h) - C_2^+ l^2; & C_2^+ &= -M_x^+(l) / (2EI^+); \\ C_{1u}^+ &= N_x^+(l) / (2Eth(1-\beta)); & C_\tau^+ &= M_x^+(l) / K'_+; & C_u^+ &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Максимальні ($x = 0$) нормальні переміщення w^+, w^- (без урахування складової обтиснення від зовнішнього навантаження), а також напруження σ_x^+, σ_x^- , що виникають на зовнішніх і внутрішніх поверхнях частин балки, можна записати у вигляді

$$\left\{ \begin{aligned} w^+ &= \frac{qL^4(1-\theta^2)}{24EI} [5(1+\theta^2) + 12(\varepsilon_1 - 0,5\nu''\beta^2)h^2/L^2] + \\ &+ \frac{qL^2h^2}{24EI} (8\alpha^2\theta^2(0,2+\beta^2) - 12\nu''\varepsilon_1\beta^2)h^2/L^2; \\ w^- &= \frac{qL^4(1-\theta^2)}{24EI} [5(1+\theta^2) + 12(\varepsilon_1 - 0,5\nu''(1-\beta)^2)h^2/L^2] - 3\nu''\varepsilon_1\tilde{q}h(1- \\ &- \beta)^2/(4E) + \frac{qL^4\theta^2}{24EI^-} [5\theta^2 + 4\beta^2(3\varepsilon_1 - 2\alpha^2(1-\beta)(0,2-\beta+\beta^2))]h^2/L^2; \end{aligned} \right. \quad (19a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_x^+(0, -h(1-\beta)) \equiv \sigma_x(0, -h) = -\frac{3L^2}{4h^2}(1-\theta^2)\tilde{q} - 0,2\tilde{q}\alpha^2, \quad \tilde{q} = q/t; \\ \sigma_x^+(0, h(1-\beta)) = \frac{3\tilde{q}L^2}{4h^4}(1-\theta^2)(1-2\beta) + 0,2\tilde{q}\alpha^2 f^+(\beta); \\ \sigma_x^-(0, h_0/2) \equiv \sigma_x(0, h) = \frac{3\tilde{q}L^2}{h_0^2}(\theta^2 + \beta^2(1-\theta^2)) + 0,2\tilde{q}\alpha^2; \\ \sigma_x^-(0, -h_0/2) = -\frac{3\tilde{q}L^2}{h_0^2}(\theta^2 - \beta^2(1-2\beta)(1-\theta^2)) + 0,2\tilde{q}\alpha^2 f^-(\beta), \end{array} \right. \quad (196)$$

де

$$f^+(\beta) = 1 - 2\beta + 10\beta^2(1-\beta); \quad f^-(\beta) = 1 - 2\beta - 10\beta(1-\beta)^2; \quad \alpha^2 = \frac{E}{2G'} - \nu'';$$

$\theta = l/a$ – відносна довжина розрізу.

Напруження $\sigma_x^+(0, h(1-\beta))$ і $\sigma_x^-(0, -h_0/2)$, що наведені у формулах (19), діють на внутрішніх поверхнях частин балки над і під розрізом відповідно.

Припустивши у формулах (19) параметри $\varepsilon_1 = \alpha^2 = \nu'' = 0$, що враховують ефекти поперечного зсуву й обтиснення, отримаємо значення максимальних напружень і переміщень за відповідними рівняннями класичної теорії тонких стрижнів Бернуллі–Ейлера:

$$\left\{ \begin{array}{l} w^+ = \frac{5qL^4(1-\theta^4)}{24EI}; \\ w^- = \frac{5qL^4(1-\theta^4)}{24EI} + \frac{5qL^4\theta^4}{24EI^-}; \\ \sigma_x^+(0, h(1-\beta)) = \frac{3\tilde{q}L^2}{4h^2}(1-\theta^2)(1-2\beta); \\ \sigma_x^+(0, -h(1-\beta)) = -\frac{3L^2}{4h^2}(1-\theta^2)\tilde{q}; \\ \sigma_x^-(0, h_0/2) = \frac{3\tilde{q}L^2}{h_0^2}(\theta^2 + \beta^2(1-\theta^2)); \\ \sigma_x^-(0, -h_0/2) = -\frac{3\tilde{q}L^2}{h_0^2}(\theta^2 - \beta^2(1-2\beta)(1-\theta^2)). \end{array} \right. \quad (20)$$

Числовий аналіз результатів. Аналіз формул (19), (20) показує, що переміщення w^+ і напруження $\sigma_x^+(0, h(1-\beta))$ верхньої частини балки, які отримані за уточненою теорією та рівняннями класичної теорії тонких стрижнів, майже або зовсім не залежать (класична модель) від рівня знаходження розрізу (параметра β) у балці за певних значень параметра θ . Аналогічна тенденція спостерігається при отриманні результатів методом граничних елементів для параметра $0,2 \leq \beta \leq 0,8$. Числовий аналіз цих результатів наведено у табл. 1.

При наближенні параметра θ до одиниці отримати стійкі результати за допомогою числового методу не вдалося, а ненульові значення, обчислені за формулами (19), є результатом впливу поперечного зсуву й обтиснення. Разом із тим за аналогією

з даними, наведеними в [12], у формулах (19) для напружень у цих підрахунках, а також далі замість параметра θ^2 будемо використовувати параметр θ^4 , що сприяє більшій точності одержаних формул. Аналіз числових даних, представлених у табл. 1, показує, що значення максимальних нормальних напружень σ_x^+ і вертикальних переміщень w^+ верхньої (ненавантаженої) частини балки змінюються від таких, якими вони могли б бути у суцільній балці товщиною $2h$ без тріщини, до нульових при наближенні параметра θ до одиниці. Середні відхилення від крайніх значень як напружень, так і переміщень не перевищують $\pm 6\%$.

Т а б л и ц я 1

Середні значення напружень та переміщень у частині балки над розрізом

θ	σ^+/\tilde{q}		$w^+E/(2\tilde{q}h)$	
	$h/L = 0,1$	$h/L = 0,2$	$h/L = 0,1$	$h/L = 0,2$
0	$\frac{-75,20}{75,04}$	$\frac{-18,95}{-18,87}$	$\frac{1597,5}{1598,9}$	$\frac{106,5}{109,5}$
0,5	$\frac{-70,50}{-66,80}$	$\frac{-17,78}{-15,86}$	$\frac{1531,0}{1538,1}$	$\frac{101,9}{101,8}$
1,0	$\frac{0,20}{-}$	$\frac{0,20}{-}$	$\frac{12,5}{-}$	$\frac{3,1}{-}$

Примітка. Над рискою наведено середні значення напружень $\sigma_x^+(0, -h(1-\beta))$ і переміщень w^+ для різних θ , обчислені за формулами (19), під рискою – результати, одержані методом граничних елементів.

Розглянемо екстремальний випадок, коли розріз розташований уздовж середньої поверхні балки ($\beta = 0,5; h_0 = h$), а крайові згинальні моменти $M_x^+(l), M_x^-(l)$ і поздовжня сила $N_x^-(l)$, що діють на краях частин балки в області розрізу, виражаються через згинальний момент $M_x(l)$ суцільної балки наступним чином:

$$M_x^+(l) = \frac{1}{8}M_x(l) + \frac{3\alpha^2}{80}qh^2; \quad M_x^-(l) = \frac{1}{8}M_x(l) + \frac{\alpha^2}{240}qh^2; \tag{21}$$

$$N_x^-(l) = \frac{3}{4h}M_x(l) - \frac{\alpha^2}{40}qh.$$

З урахуванням попередніх зауважень стосовно заміни параметра θ^2 формули (19) для максимальних нормальних напружень (у перерізі $x = 0$) на зовнішніх поверхнях балки в області, де існує розріз, мають наступний вигляд:

$$\sigma_x(0, \pm h) = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{L^2}{h^2} (1 + 3\theta^4) \tilde{q} + 0,2\tilde{q}\alpha^2; \\ -\frac{3}{4} \frac{L^2}{h^2} (1 - \theta^4) \tilde{q} - 0,2\tilde{q}\alpha^2. \end{cases} \tag{22}$$

Формули (19) для максимальних нормальних напружень верхньої і нижньої частин балки будуть такими:

$$\sigma_x^\pm(0, \pm 0) = \begin{cases} 0,25\tilde{q}\alpha^2; \\ -\frac{3L^2}{h^2}\theta^4\tilde{q} - 0,25\tilde{q}\alpha^2, \end{cases} \quad (23)$$

де “+” і “-” у позначеннях $\pm h$ (22) відносяться відповідно до нижньої й верхньої лицьових поверхонь балки; напруження $\sigma_x^\pm(0, \pm 0)$ діють на внутрішніх поверхнях частин балки, що знаходяться над (+) і під (-) розрізом відповідно.

Максимальні переміщення серединної поверхні верхньої і нижньої частин балки (w^+ , w^-) при $\beta = 0,5$ можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} w^+ &= \frac{qL^4(1-\theta^2)}{24EI} [5(1+\theta^2) + 12(\varepsilon_1 - 0,125\nu'')h^2/L^2] + \\ &+ \frac{qL^2h^2}{24EI} (3,6\alpha^2\theta^2 - 3\nu''\varepsilon_1 h^2/L^2); \\ w^- &= \frac{5qL^4}{24EI} [1 + 7\theta^4 + (2,4\varepsilon_1(1+\theta^2) + 0,3\nu''(1-\theta^2) + 0,08\alpha^2\theta^2)h^2/L^2] - \\ &- 3\nu''\varepsilon_1 \tilde{q}h/(16E). \end{aligned} \quad (24)$$

У класичній постановці відповідні величини для визначення напружень і вертикальних переміщень тонкої балки, що має розріз у серединній поверхні, отримаємо з формул (22)–(24):

$$\begin{cases} w^+ = \frac{5qL^4(1-\theta^4)}{24EI}; & w^- = \frac{5qL^4}{24EI}(1+7\theta^4); \\ \sigma_x^+(0, h/2) = 0; & \sigma_x^+(0, -h/2) = -\frac{3}{4}\frac{L^2}{h^2}(1-\theta^2)\tilde{q} \equiv \sigma_x(0, -h); \\ \sigma_x^-(0, h/2) = \frac{3\tilde{q}L^2}{4h^2}(1+3\theta^2) \equiv \sigma_x(0, h); & \sigma_x^-(0, -h/2) = -\frac{3\tilde{q}L^2\theta^2}{h^2}. \end{cases} \quad (25)$$

У табл. 2 наведено значення безрозмірних напружень σ^- та переміщень w^- , обчислених за формулами (22) і (24), які залежать від параметрів θ і h/L .

Т а б л и ц я 2

Значення напружень і переміщень у балці під розрізом

θ	σ^-/\tilde{q}		$w^-E/(2\tilde{q}h)$	
	$h/L = 0,1$	$h/L = 0,2$	$h/L = 0,1$	$h/L = 0,2$
0	75,20	18,95	1599,5	106,9
	79,95	23,80	2285,9	278,4
0,5	89,26	22,46	2292,0	151,8
	94,01	27,21	3157,0	368,1
1	300,20	75,20	12572,5	799,4
	304,90	79,95	13975,0	1149,9

Примітка. Над рискою наведено значення напружень і деформацій для ізотропного матеріалу, під рискою – для однонаправленого графітопластика ($E/G' = 50$; $E/E' = 25$; $\nu = \nu'' = 0,25$).

Аналіз формул (20)–(23) та даних табл. 2 показує, що максимальні нормальні напруження σ_x^- та переміщення w^- нижньої (навантаженої) частини балки товщиною h для $\beta = 0,5$ під тріщиною зростають (за умови збільшення параметра θ до одиниці) відповідно у чотири та вісім разів порівняно з тими, якими вони могли б бути у суцільній балці товщиною $2h$ без тріщини.

Врахування поправок від поперечного зсуву й обтиснення дещо змінює ці співвідношення, але загальна тенденція такого зростання зберігається. Необхідно також зауважити, що врахування наведених поправок для ізотропного матеріалу дає незначні уточнення порівняно з класичною теорією. Разом із тим для однонаправленого графітопластика аналогічні уточнення можуть бути суттєвими. Так, переміщення нижньої частини балки ($h/L = 0,2$) можуть зрости у рази: від 1,5 для $\theta = 1$ до 2,6 для $\theta = 0$. Для напружень такий вплив буде менший: 7...27% за аналогічних значень параметра θ .

Висновки

1. Отримано елементарні формули для напружень і переміщень у балці з внутрішнім розрізом, які з достатньою точністю описують напружено-деформований стан (НДС) всіх частин балки. Точність результатів підтверджується порівнянням з відповідними числовими даними, отриманими методом граничних елементів.

2. Аналіз НДС нижньої (навантаженої) частини балки під тріщиною показує, що у випадку знаходження розрізу вздовж серединної лінії балки ($\beta = 0,5$) нормальні напруження σ_x^- та переміщення w^- зростають за умови збільшення параметра θ від нуля до одиниці відповідно у чотири та вісім разів порівняно з тими, якими вони могли б бути у суцільній балці товщиною $2h$ без тріщини.

3. Числовий аналіз формул для нормальних напружень σ_x^+ і переміщень w^+ верхньої (ненавантаженої) частини балки показує, що їх значення практично не залежать від рівня знаходження розрізу (параметра β) у балці за певних значень параметра θ . Аналогічна тенденція спостерігається при отриманні результатів методом граничних елементів для параметра $0,2 \leq \beta \leq 0,8$.

4. Врахування поправок від поперечного зсуву й обтиснення за допомогою рівнянь неklasичної моделі згину коротких балок дає незначні уточнення у межах $h/L \leq 0,2$ для ізотропного матеріалу порівняно з класичною теорією. У випадку матеріалу з однонаправленого графітопластика аналогічні уточнення можуть зрости у рази: від 1,5 для $\theta = 1$ до 2,6 для $\theta = 0$ для переміщень нижньої частини балки ($h/L = 0,2$). Для напружень σ_x^- такий вплив буде менший: 7...27% за аналогічних значень параметра θ .

Резюме

В рамках неklassической модели композитных балок получено аналитическое решение для балки с продольным разрезом, коллинеарным к ее срединной линии. Изгибающая нагрузка на балку способствует раскрытию разреза. Получены элементарные формулы для напряжений и перемещений во всех частях балки. Точность результатов подтверждается путем сравнения с соответствующими данными, полученными при решении плоской задачи теории упругости методом граничных элементов.

1. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацьшин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинках и оболочках. – Киев: Наук. думка, 1975. – 444 с.
2. Серенсен С. В., Зайцев Г. П. Несущая способность тонкостенных конструкций из армированных пластиков с дефектами. – Киев: Наук. думка, 1982. – 296 с.

3. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. В 2 т. / Пер. с англ. под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 1016 с.*
4. *Черепанов Г. П. Механика разрушения композитных материалов. – М.: Наука, 1983. – 296 с.*
5. *Лозовой Б. Л., Панасюк В. В. Некоторые задачи изгиба полосы с прямолинейной трещиной // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. Механика и машиностроение. – 1962. – № 1. – С. 138 – 143.*
6. *Шваб'юк В. І. Згин композитної балки з поперечною тріщиною // Наук. нотатки. – 1996. – Вип. 3. – С. 190 – 197.*
7. *Орияк І. В., Бородій М. В., Красовський А. Я. Метод обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень для тріщин від вирізів // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1999. – № 1. – С. 69 – 74.*
8. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.*
9. *Шевченко В. П., Довбня К. М. Метод граничних інтегральних рівнянь у задачах статки пологих ортотропних оболонок з розрізами й отворами // Математичні методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – 46, вип. 1. – С. 47 – 59.*
10. *Гнуни В. Ц., Егуазарян Т. А. Об устойчивости пластинок, ослабленных трещиной // Оптимальное управление устойчивости и прочности механических систем. – Ереван: Изд. Ереван. гос. ун-та, 2002. – С. 37 – 41.*
11. *Егуазарян Т. А. Осесимметрический изгиб круглых пластин, ослабленных монетообразной трещиной // Изв. НАН Армении. Механика. – 2006. – 59, № 2. – С. 57 – 62.*
12. *Shvabyuk V., Pasternak I., and Sulym H. Bending of orthotropic plate containing a crack parallel to the median plane // Acta Mech. Automat.. – 2011. – 5, No. 4. – P. 94 – 100.*
13. *Bozhydarnyk V., Shvabyuk V., Pasternak I., and Shvabyuk V. Crack propagation in a composite laminated plate under bending // Proc. of the 4th Int. Conf. Crack Paths (Sept. 19–21, 2012, Gaeta, Italy). – 2012. – P. 1113 – 1120.*
14. *Шваб'юк В. І., Морозов М. І., Ротко В. О. Визначення міцності та жорсткості пакету балок // Сільськогосподарські машини. – 2010. – Вип. 20. – С. 366 – 372.*

Поступила 10. 04. 2014