

Расчет колебаний ротора с “дышащей” трещиной по трехмерной модели

Н. Г. Шульженко,¹ Б. Ф. Зайцев, Н. Е. Викман, А. В. Асаенок

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина

¹ shulzh@ipmash.kharkov.ua

Представлена методика расчета колебаний тела с трещиной по трехмерной модели. “Дыхание” трещины определяется условиями контактирования ее берегов. Приведены примеры расчета.

Ключевые слова: ротор, трещина, трехмерная модель, контакт, конечный элемент.

Введение. Анализ вибрационного состояния тел с трещинами актуален при решении задач диагностики конструкций. В большинстве работ, посвященных этой тематике (например, [1–6]), применяются стержневые модели, в которых по-разному учитывается изменение состояния и влияния трещины на податливость системы при повороте, что связано с ее “дыханием”. В [2–6] изменение податливости системы с трещиной определяется на основе использования энергетических соотношений механики трещин. В [1, 3] ее дыхание задается как мгновенный переход из открытого в закрытое состояние и, наоборот, в зависимости от углового положения системы. В [1, 4–6] переменная податливость определяется в зависимости от углового положения системы с введением линии закрытия трещины, исходя из кинематических [1, 4, 5] или статических [1, 6] представлений. Условность моделирования процесса дыхания и применение стержневых моделей не позволяют в ряде случаев адекватно отобразить особенности рассматриваемых процессов (наличие трещины в местах резкого изменения формы деталей, наклонные, продольные и криволинейные трещины). Представляется, что процессы сближения–расхождения берегов трещины и изменения податливости системы с трещиной более адекватно могут быть описаны при решении контактной задачи на основе использования трехмерных моделей.

В данной работе описываются методика и примеры расчета колебаний ротора по трехмерной модели с трещиной произвольного вида, дыхание которой определяется контактированием и раскрытием ее берегов с использованием условий нормального отрыва.

Методика расчета. Составляющими методики являются построение конечноэлементной (КЭ) модели тела с трещиной, учет контактирования (дыхания) ее берегов, построение уравнений колебаний вращающегося тела (ротора) и алгоритмов решения нелинейной начально-краевой задачи.

Способ построения КЭ модели тела с трещиной [7] состоит в разрыве связей между узлами ее КЭ сетки по поверхности, разделяющей берега трещины. Полученная модифицированная сетка конечных элементов содер-

жит разделяющую поверхность с не связанными между собой двойными узлами, представляющими берега трещины.

На рис. 1,а,б показана трансформация КЭ сетки для введения трещины. Ее исходное состояние соответствует регулярной сетке без трещины. Трансформация исходной и образование нерегулярной КЭ сетки с трещиной (рис. 1,б) осуществляются выделением узлов, первоначально расположенных на разделяющей поверхности (отмечены символом \times), и смещением к ним соседних узлов (обозначены символом \circ) – рис. 1,а. В результате на разделяющей поверхности образуются двойные узлы (рис. 1,б), при этом конечные элементы A преобразуются в A' , элементы C, D – в C', D' , а элементы B упраздняются.

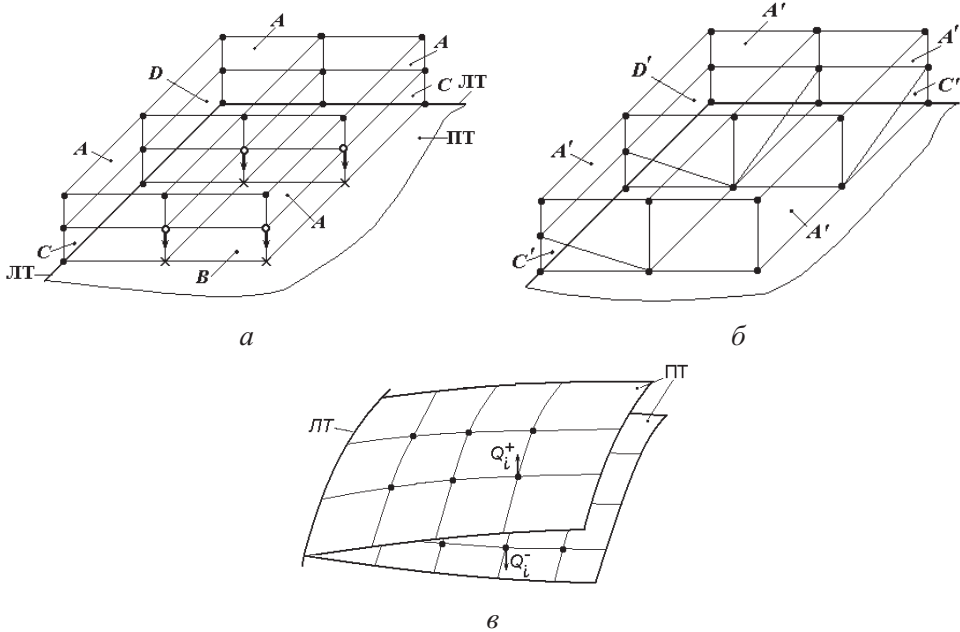


Рис. 1. Схемы трансформации сетки при введении трещины (а, б) и диполей в двойных узлах (в): ПТ – поверхность трещины; ЛТ – линия трещины; A, B, C, D – конечные элементы.

Использование описанной схемы введения разрезов для учета трещины приводит к изменению основных характеристик КЭ модели: матриц жесткости $[K]$ и масс $[M]$. Их формирование для элементов A (рис. 1,а) проводится с учетом изменения ряда координат узлов, для элементов B – с учетом разрыва связей узлов \times с соседними узлами и диагонализацией матриц относительно узлов \times :

$$[K_B] = G \sum_j \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j, \quad [M_B] = g \sum_j \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j,$$

в уравнениях принята диадная форма представления тензоров (матриц); \mathbf{i}_j – вектор, только j -я компонента которого отличается от нуля и равна единице; j – индекс, указывающий на узлы \times и компоненты перемещений в этих узлах; $G \gg 1, g \ll 1$ – соответственно большое и малое числа.

Для изменения конечных элементов C, D (рис. 1,а), в которых число граней и узлов уменьшается, применяются формализованные процедуры матричных преобразований. Модифицированные матрицы жесткости $[K']$ и масс $[M']$ этих элементов определяются по зависимостям

$$[K'] = [A]^T [K] [A] + G \sum_j \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j; \quad [M'] = [A]^T [M] [A] + g \sum_j \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j,$$

где $[A] = \mathbf{E} - \sum_j \mathbf{i}_j \mathbf{i}_j + \sum_{j,k} \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k$ – матрица преобразования; $\mathbf{E} = \sum_s \mathbf{i}_s \mathbf{i}_s$ – единичная матрица; k – относится к узлам \mathbf{o} и перемещениям в них.

Описанная схема позволяет моделировать трещины со сложной поверхностью, например, состоящей из состыкованных или пересекающихся плоскостей различных направлений, и не ограничивает количество вводимых трещин.

При колебаниях тела берега трещины могут входить в односторонний контакт, когда отрыв возможен, а взаимное проникновение берегов отсутствует.

В рассматриваемой постановке контактирование берегов задается по нормали к поверхности трещины. При этом допускается проскальзывание без трения. Условия непроникновения берегов трещины имеет вид

$$\delta_{in} = u_{in}^+ - u_{in}^- \geq 0, \quad (1)$$

где u_{in}^+, u_{in}^- – перемещения по нормали \bar{n} в i -м двойном узле на положительной (+) и отрицательной (–) поверхностях трещины; δ_{in} – сближение по нормали в i -м двойном узле; знаку равенства соответствует состояние контакта берегов трещины.

Силы, возникающие при контактировании берегов трещины (в зонах раскрытия они отсутствуют), находятся с помощью системы контактных сил $Q_i \{Q_i^+, Q_i^-\}$, которые приложены в двойных узлах [8], попарно равны по величине ($Q_i^+ = Q_i^-$), противоположны по направлению и подлежат определению, причем $i = 1, \dots, m$, где m – число двойных узлов на поверхности трещины. В соответствии с терминологией, используемой в теории упругости, их можно назвать диполями (рис. 1,б).

Уравнения движения вращающегося тела (ротора) с дышащей трещиной представляются в подвижной системе координат, связанной с телом, так:

$$[M] \ddot{\mathbf{u}} - 2\omega [M_2] \dot{\mathbf{u}} + ([K] - \omega^2 [M_1] - \omega^2 [M'_\omega]) \mathbf{u} = \omega^2 \mathbf{P} + \mathbf{F} + \mathbf{Q} \{Q_i\}, \quad (2)$$

где \mathbf{u} – вектор перемещения узлов; ω – частота вращения; $\omega^2 \mathbf{P}$ – вектор центробежных сил в недеформированном состоянии; \mathbf{F} – вектор внешней нагрузки; $\mathbf{Q} \{Q_i\}$ – система диполей, учитывающая переменные поверхностные силы, действующие по берегам трещины; $[M_1], [M_2], [M'_\omega]$ состоят из

элементов матрицы масс, причем $[M_1]$ имеет симметричную структуру, $[M_2]$, $[M'_\omega]$ – несимметричную.

Матрицей $[M'_\omega]$ в (2) учитывается в линейной постановке изменение центробежных сил при смещениях с сохранением их радиальной направленности [9]. Распределение контактных сил – диполей $Q\{Q_i\}$ изменяется во времени и определяется из решения контактной задачи для берегов трещины до выполнения условий (1).

Определение матриц масс и жесткости тела (2) осуществляется при полностью открытой трещине. Благодаря введению системы диполей Q в правой части уравнений (2) учитывается влияние изменения формы тела с изменением зон контакта, что позволяет при этом не переопределять матрицы жесткости и масс.

Решение начальной задачи (2) для расчета колебаний тела выполняется прямым интегрированием по двухслойной неявной конечноразностной схеме Ньюмарка, являющейся, безусловно, устойчивой [10]. Конечноразностные соотношения по методу Ньюмарка представляются в виде

$$[\hat{K}]u_{t+\Delta t} = \hat{R}_{t+\Delta t}, \quad (3)$$

где $[\hat{K}]$ – модифицированная матрица жесткости; $u_{t+\Delta t}$ – вектор перемещений для конца шага; $\hat{R}_{t+\Delta t}$ – модифицированная правая часть уравнений (2) для момента времени $t + \Delta t$.

Модифицированный вектор правой части может быть записан следующим образом:

$$\hat{R}_{t+\Delta t} = \tilde{R}_{t+\Delta t} + Q_{t+\Delta t},$$

где $\tilde{R}_{t+\Delta t}$ соответствует известной части модифицированного вектора правой части; $Q_{t+\Delta t}$ – заранее неизвестная часть, однако в конце шага она должна быть такой, чтобы удовлетворялись условия контакта (1).

Перемещения в конце шага $u_{t+\Delta t}$ можно представить в виде

$$u_{t+\Delta t} = \tilde{u}_{t+\Delta t} + \bar{u}_{t+\Delta t},$$

где $\tilde{u}_{t+\Delta t}$ – вектор перемещений, соответствующий известной (вычисленной) части выражения (3); $\bar{u}_{t+\Delta t}$ – вектор дополнительных перемещений от контактных сил $Q_{t+\Delta t}$.

Перемещения $\tilde{u}_{t+\Delta t}$ определяются при решении системы (3) с известной правой частью, а перемещения $\bar{u}_{t+\Delta t}$ – после нахождения $Q_{t+\Delta t}$ методом итераций до выполнения условий контактирования (1). После определения контактных усилий перемещения $\bar{u}_{t+\Delta t}$ могут быть вычислены:

$$\bar{u}_{t+\Delta t} = [B]_{\Delta t} Q_{t+\Delta t},$$

где $[B]_{\Delta t}$ – матрица коэффициентов влияния размерностью $N \times m$ (N – число переменных в узлах). Элементы строк матрицы $[B]_{\Delta t}$ вычисляются предварительно и равны динамическим смещениям в теле за промежуток

времени Δt от единичных диполей, приложенных поочередно в каждом из двойных узлов.

Пример расчета. Рассматривались колебания горизонтального ротора на двух жестких опорах с поперечной трещиной, занимающей половину сечения и расположенной посередине вала (рис. 2). На ротор действует сила тяжести. Длина вала $l = 144$ см, радиус кругового сечения $R = 12$ см.

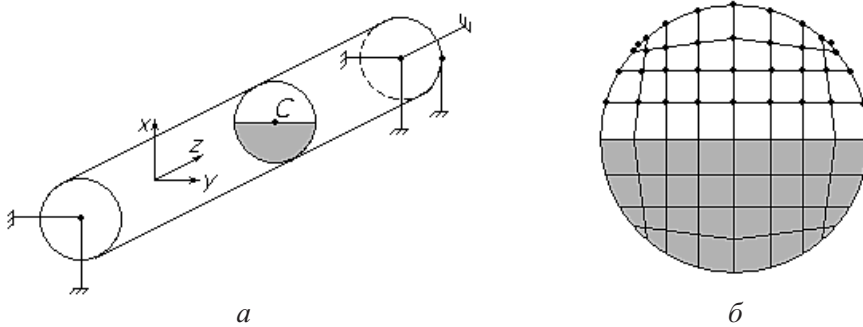


Рис. 2. Расчетная схема ротора: *a* – ротор с трещиной; *б* – КЭ дискретизация в сечении с трещиной (+ – двойные узлы).

При наличии трещины жесткость ротора перестает быть постоянной, она изменяется в зависимости от угла поворота. В связи с этим в системе с двойкой жесткостью появляется зона неустойчивых колебаний $[\omega_1, \omega_2]$, где $\omega_1 = 1110 \text{ с}^{-1}$, $\omega_2 = 1440 \text{ с}^{-1}$, определенная расчетами. Парная собственная частота изгибных колебаний по первой форме ротора без трещины будет $p_1 = p_2 = 1410 \text{ с}^{-1}$, с открытой трещиной – $p_1 = 1070 \text{ с}^{-1}$, $p_2 = 1320 \text{ с}^{-1}$. Далее движение ротора рассматривается в диапазоне устойчивых колебаний.

Определены параметры поперечных, продольных и крутильных колебаний ротора для разных частот вращения. На рис. 3 приведены перемещения и углы поворота точки *C*, расположенной в середине ротора (рис. 2). Со временем в системе устанавливаются периодические колебания, соответствующие частоте вращения ротора. Наблюдается ожидаемая связность всех видов колебаний при наличии трещины.

Исследован спектральный состав перемещений u_x, u_y центра ротора на разных частотах (рис. 4,а). Из приведенных данных следует, что в области частот, близких к половине первой ($\omega \approx 650 \text{ с}^{-1}$) и 1/3 ($\omega \approx 425 \text{ с}^{-1}$) критической частоты, возникают супергармонические резонансы 2/1 и 3/1 соответственно. В этих областях амплитуда второй (для резонанса 2/1) и третьей (для резонанса 3/1) гармоник достигает максимума.

При суперрезонансе 2/1 траектории движения оси ротора (рис. 4,б) имеют сложную петлеобразную форму, причем размер петли и ее положение меняются при прохождении диапазона суперрезонанса 2/1. С удалением от области супергармонического резонанса траектории близки к эллиптическим.

Супергармонический резонанс 2/1 оказывает влияние и на дыхание трещины. Берега трещины вдали от области супергармонического резонанса испытывают полный цикл закрытия–раскрытия. На резонансе трещина остается в основном частично открытой при изменении зоны контакта (рис. 4,в).

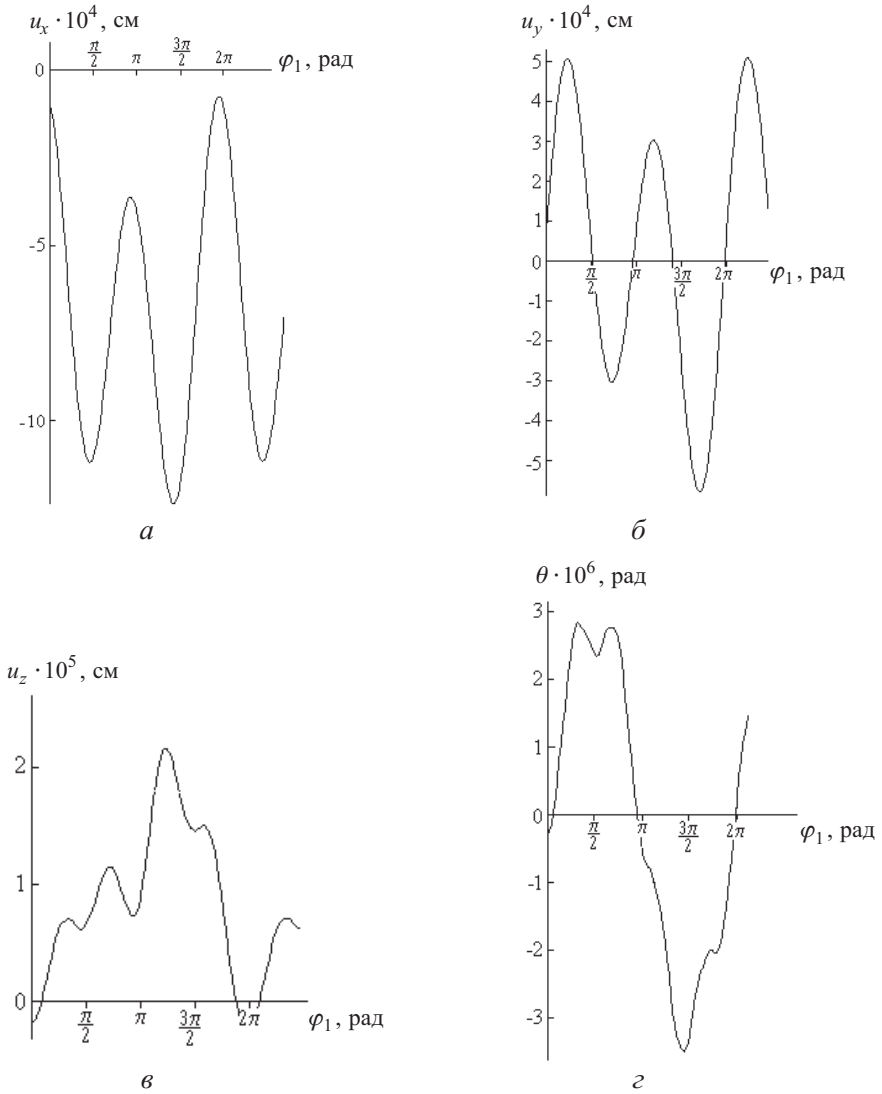
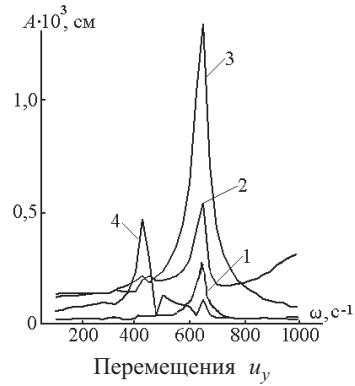
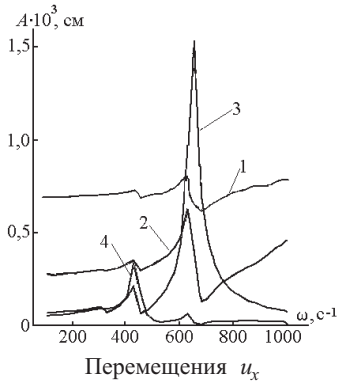


Рис. 3. Перемещения середины сечения с трещиной за период поперечных (а, б), продольных (в) и крутильных (г) колебаний при $\omega = 700 \text{ с}^{-1}$.

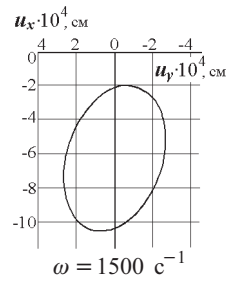
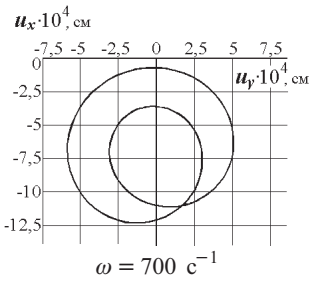
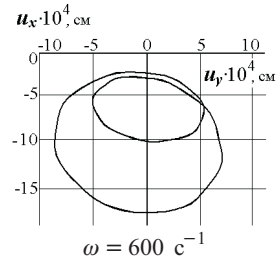
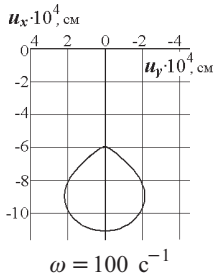
Выполнена оценка совместного влияния поперечной трещины и небаланса на вибрационное состояние ротора при различных частотах вращения. Масса небаланса располагается в одной из точек (A, B, C, D) сечения с трещиной (рис. 5,а).

С увеличением частоты вращения влияние небаланса становится определяющим, и движение оси ротора близко к прецессионному в установившемся состоянии. В зависимости от расположения массы небаланса трещина остается полностью открытой, полностью закрытой или частично открытой за период колебаний (рис. 5,б).

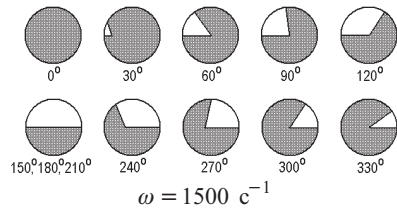
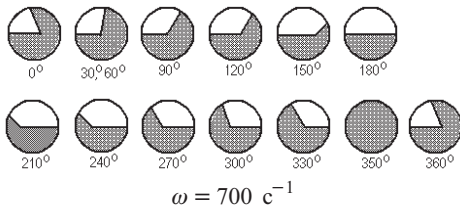
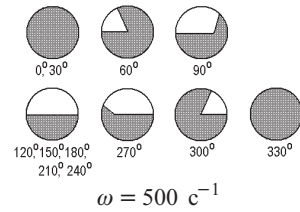
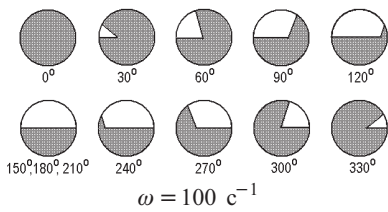
По предложенной методике, а также по смоделированной (на основе этой методике) кинематической схеме мгновенного попеременного перехода трещины из открытого состояния в закрытое в зависимости от угла поворота, как



a



б



в

Рис. 4. Характеристики колебаний ротора: а – амплитуды гармонических составляющих перемещений центра ротора с трещиной (1 – A_0 ; 2 – A_1 ; 3 – A_2 ; 4 – A_3); б – траектории движения центра ротора; в – изменение зоны контакта берегов трещины в зависимости от поворота сечения с трещиной.

Значения показателя нелинейности A_2/A_1 для различных схем учета дыхания трещины

ω, c^{-1}	Схема учета процесса контактирования берегов	Кинематическая схема мгновенного перехода
100	0,20	0,22
300	0,31	0,33
500	0,36	0,41
600	0,93	1,23
700	3,20	4,95
800	0,63	1,36
1000	0,16	0,18

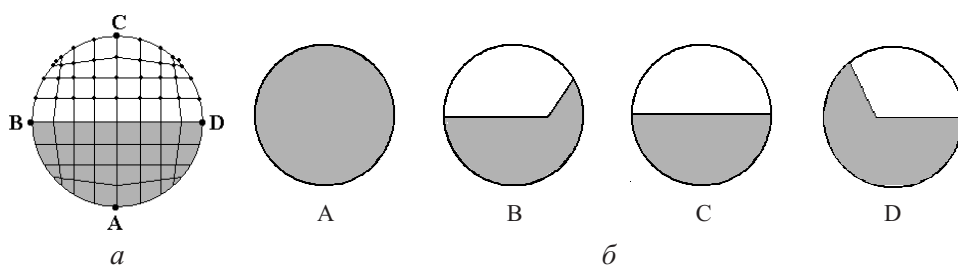


Рис. 5. Схемы расположения небаланса (а) и положения зон контакта берегов трещины (б) для ротора с трещиной и небалансом в одной из точек A, B, C, D .

принято во многих работах, проведены расчеты колебаний ротора с учетом процесса открытия–закрытия трещины и контактирования ее берегов.

Сравнение данных для этих схем учета дыхания трещины по показателю нелинейности A_2/A_1 (таблица) свидетельствует, что вдали от супергармонического резонанса 2/1 они различаются незначительно, а на резонансе различие достигает 35%, при этом трещина главным образом остается частично открытой, закрываясь на небольшом промежутке времени, что и приводит к заметным расхождениям в значениях показателя нелинейности.

Заключение. Представлена трехмерная расчетная модель колебаний ротора, учитывающая произвольные трещины. Модель позволяет рассматривать процесс контактирования берегов трещин по нормали к их поверхности. Предложена новая схема учета дыхания трещины для трехмерной конечно-элементной модели колебаний тела на основе введения диполей в области трещины.

Расчет колебаний ротора с поперечной трещиной показал, что в диапазоне частот вращения, близких к половине первой и 1/3 критической частоты, возникают супергармонические резонансы 2/1 и 3/1 соответственно. Форма траектории движения оси ротора изменяется с увеличением частоты вращения. На суперрезонансе 2/1 она имеет сложную петлеобразную форму, в зарезонансной области вырождается в эллиптическую с изменением размера и положения.

С появлением небаланса его влияние становится определяющим, а с повышением частоты вращения трещина принимает фиксированное положение в зависимости от расположения массы небаланса в сечении с трещиной.

Резюме

Представлено методику розрахунку коливань тіла з тріщиною за тривимірною моделлю. “Дихання” тріщини визначається умовами контактування її берегів. Наведено приклади розрахунку.

1. Шульженко Н. Г., Воробьев Ю. С. Численный анализ колебаний системы турбоагрегат–фундамент. – Киев: Наук. думка, 1991. – 232 с.
2. Матвеев В. В., Бовсуновский А. П. К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях // Пробл. прочности. – 2000. – № 3. – С. 5 – 23.
3. Kicinski J. Assessment of materials and operational imperfections in rotating machinery // Key Eng. Mater. – 2005. – **293-294**. – P. 391 – 400.
4. Sekhar A. S. and Dey J. K. Effects of cracks on rotor system instability // Mech. Mach. Theory. – 2000. – **35**. – P. 1657 – 1674.
5. Darpe A. K., Gupta K., and Chawla A. Coupled bending, longitudinal and torsional vibrations of a cracked rotor // J. Sound Vibr. – 2004. – **269**. – P. 33 – 60.
6. Pennacchi P., Bachschmid N., and Vania A. A model-based identification method of transverse cracks in rotating shafts suitable for industrial machines // Mech. Systems Signal Proc. – 2000. – **20**. – P. 2112 – 2147.
7. Асаенок А. В., Зайцев Б. Ф., Шульженко Н. Г. Методика введения разрезов в схеме метода конечных элементов в задачах статики и собственных колебаний трехмерных конструкций // Пробл. машиностроения. – 2003. – **6**, № 3. – С. 58 – 63.
8. Зайцев Б. Ф., Шульженко Н. Г., Асаенок А. В., Ерецькая Н. Е. Метод расчета колебаний тел, содержащих трещины с контактирующими берегами // Там же. – 2008. – **11**, № 4. – С. 34 – 42.
9. Зайцев Б. Ф., Асаенок А. В., Викман Н. Е. Построение матриц масс для учета центробежных сил при колебаниях трехмерного вращающегося тела // Вест. НТУ “ХПИ”. Динамика и прочность машин. – 2009. – Вып. 30. – С. 52 – 56.
10. Бате К., Вильсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.

Поступила 22. 12. 2010