

Построение двухслойных схем интегрирования уравнений пластического течения в теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрена методология построения семейства двухслойных ω -схем интегрирования уравнений теории пластического течения, описывающих неизотермические процессы нагружения по криволинейным траекториям деформирования малой кривизны. В этом случае напряженно-деформированное состояние зависит от истории термосилового нагружения, и процесс неупругого деформирования должен проследиваться на всем исследуемом интервале времени при пошаговом решении краевой задачи. Основные положения феноменологической модели базируются на уравнениях пластического течения Прандтля–Рейсса и условии текучести Губера–Мизеса. Процесс нагружения разбивается на отдельные расчетные этапы по времени. Для каждого из них уравнения пластического течения интегрируются за этап нагружения. Предложена общая схема преобразований для построения семейства двухслойных ω -схем интегрирования уравнений пластического течения. Сформулированы условия, при которых рассматриваемые уравнения пластичности согласуются с принципом необратимости работы на приращениях пластических деформаций и постулатом упрочнения Друкера. В качестве примера, иллюстрирующего свойства этих уравнений пластичности, решена задача о деформации круглой тонкостенной трубы, находящейся под воздействием осевого растяжения и крутящего момента. Представлены результаты решения модельной задачи, полученные с использованием различных двухслойных схем интегрирования. Даны практические рекомендации относительно выбора параметра ω .

Ключевые слова: теория пластичности, девиаторы напряжений и деформаций, неизотермические процессы, упругопластическое деформирование, траектории деформирования малой кривизны, пропорциональное нагружение, термомеханическая поверхность, постулат Друкера.

Введение. При исследовании неизотермических процессов упругопластического деформирования процесс нагружения разбивают на отдельные временные этапы. Анализ кинетики напряженно-деформированного состояния проводят с помощью метода последовательного прослеживания истории термосилового нагружения от этапа к этапу, когда на каждом последующем этапе решение задачи определяют с учетом полученного на предыдущем. Выбор продолжительности этапа нагружения зависит от характера изменения внешней нагрузки и температурного поля, действующих на тело.

Решение эволюционной упругопластической задачи на основе теорий инкрементального типа заключается в нахождении компонент напряжений, деформаций и перемещений на каждом этапе нагружения путем решения системы нелинейных уравнений относительно приращений искомых величин за этап нагружения. Для решения нелинейной краевой задачи, сформулированной в приращениях, применяют приближенные методы, с помощью которых задачу термопластичности на каждом этапе нагружения сводят к последовательному решению вспомогательных линейных задач.

Следует, однако, учитывать, что при решении упругопластической задачи в приращениях на каждом этапе нагружения необходимо контролировать точность удовлетворения разрешающим уравнениям, записанным для полных значений компонент напряжений, деформаций и перемещений, поскольку краевая задача решается приближенно для приращений этих величин и, следовательно, при их сложении может накапливаться погрешность.

Кроме того, использование определяющих уравнений в приращениях предполагает большую степень гладкости аппроксимирующих функций для обобщенных диаграмм деформирования материала, поскольку для устойчивости вычислительного процесса требуется обеспечить непрерывность касательных модулей этих диаграмм.

Следует также учитывать, что при использовании шагово-итерационных методов решения упругопластической задачи, сформулированной в приращениях, может иметь место так называемый эффект “ложной разгрузки”, когда в процессе активного пластического деформирования в некоторых точках тела на последующих итерациях происходит разгрузка по упругому закону. Для устранения эффекта ложной разгрузки необходимо либо значительно уменьшить шаги приращения нагрузки, либо располагать средствами обнаружения неверной разгрузки, чтобы иметь возможность продвигаться по кривой деформирования материала в обратном направлении. Первый способ увеличивает время решения задачи, второй – усложняет вычислительный алгоритм и неудобен с точки зрения программной реализации.

Альтернативный подход состоит в том, чтобы проинтегрировать уравнения пластического течения за этап нагружения с целью получения системы разрешающих уравнений не для приращений, а для полных компонент напряжений, деформаций и перемещений. Именно такой подход используют в своих работах Ю. Н. Шевченко и его ученики в Институте механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины. Например, в [1, 2] рассматриваются определяющие соотношения, полученные путем поэтапного интегрирования уравнений пластического течения. В этой связи следует отметить методику расчета кинетики напряжений и деформаций в сварочных конструкциях, используемую в Институте электросварки им. Е. О. Патона НАН Украины [3, 4].

Применение указанного подхода к решению упругопластической задачи позволяет избежать трудностей, связанных с учетом эффекта ложной разгрузки, вычислением касательных модулей по диаграммам деформирования материала и накоплением ошибок при численном решении задачи в приращениях, что способствует устойчивости вычислительного процесса. При этом длительность этапа нагружения может быть достаточно большой, если в пределах временного этапа деформирование всех точек тела происходит по криволинейным траекториям малой кривизны, что значительно сокращает вычислительные затраты при численном анализе.

В то же время необходимо учитывать, что в методике решения упругопластической задачи [3, 4] принимается допущение, что на каждом временном этапе нагружения компоненты направляющего девиатора напряжений не изменяются в пределах этапа и аппроксимируются соответствующими значениями в рассматриваемый момент нагружения. Заметим, что речь идет только

об аппроксимации компонент направляющего девиатора напряжений в уравнениях пластического течения, а не о том, что на каждом временном этапе реализуется пропорциональное нагружение [5].

Очевидно, что использование кусочно-постоянной аппроксимации компонент девиатора напряжений существенно упрощает интегрирование уравнений пластического течения. Тем не менее допущение о том, что на каждом временном этапе направляющий девиатор напряжений не изменяется в процессе нагружения, может быть достаточно ограниченным. В частности, при описании процессов пластического деформирования в условиях сложного нагружения может возникнуть необходимость использования в расчетах достаточно большого количества временных интервалов, что увеличивает время решения упругопластической задачи.

Отметим, что в работах [1, 2] интегрирование уравнений пластического течения за этап нагружения основывается на известной из анализа теореме Лагранжа о среднем значении [6], и предположение о том, что на каждом временном этапе компоненты направляющего девиатора напряжений не изменяются в процессе нагружения не используется.

Следует подчеркнуть, что математическое обоснование корректности определяющих соотношений, полученных путем интегрирования уравнений пластического течения за этап нагружения [1–4], а также анализ сходимости приближенных методов решения соответствующих нелинейных краевых задач в этих работах не обсуждаются. Очевидно, что корректность упомянутых уравнений пластичности может иметь место, если не нарушаются некоторые общие принципы, положенные в основу теории течения любого вида. С учетом этого необходимо определить те условия, при которых уравнения пластичности согласуются с принципом необратимости работы на приращениях пластических деформаций и постулатом упрочнения Друкера [7]. Заметим, что при выполнении этих условий существует взаимно однозначное соответствие между девиаторами напряжений и деформаций, и, значит, в пределах этапа нагружения всегда можно выразить напряжения через деформации, и наоборот. Более того, при исследовании условий разрешимости нелинейной краевой задачи, соответствующей принятой модели деформирования, а также доказательстве сходимости приближенных решений к точному решению задачи корректность определяющих соотношений составляет основу математического анализа.

Ранее [8] были сформулированы условия существования и единственности решения краевой задачи, описывающей неизотермические процессы упругопластического деформирования по траекториям малой кривизны. Заметим, что краевая задача сформулирована на основе определяющих соотношений, полученных интегрированием уравнений пластического течения за этап нагружения с использованием формулы прямоугольников [9], что равносильно допущению, согласно которому на каждом временном этапе направляющий девиатор напряжений не изменяется в процессе нагружения. Таким образом, приведенные [8] результаты анализа краевой упругопластической задачи свидетельствуют о корректности определяющих соотношений процессов малой кривизны в форме уравнений, которые используются в работах [3, 4].

В настоящей работе рассматриваются методологические аспекты построения семейства двухслойных ω -схем интегрирования уравнений теории пластического течения, описывающих неизотермические процессы нагружения по криволинейным траекториям деформирования малой кривизны. Задача об интегрировании уравнений пластического течения сформулирована, как и задача Коши, для обыкновенных дифференциальных уравнений с начальным условием, причем в качестве аргумента (параметра, характеризующего процесс нагружения) принимается длина траектории деформирования в пространстве пластических деформаций. Предложена общая схема математических преобразований для построения семейства двухслойных ω -схем интегрирования уравнений пластического течения, а также исследованы условия, при которых эти уравнения согласуются с принципом необратимости работы на приращениях пластических деформаций и постулатом упрочнения Друкера.

Основные положения феноменологической модели. Пусть $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))$ ($1 \leq i, j \leq 3$) – симметричный тензор напряжений, представленный в виде двух составляющих:

$$\sigma(t) = \sigma_S(t) + \sigma_D(t),$$

где $\sigma_S(t)$ – шаровой тензор; $\sigma_D(t)$ – девиатор напряжений; t – время или какой-либо иной параметр, обозначающий изменение нагрузки, действующей на тело.

Тензор малых деформаций $\varepsilon(t) = (\varepsilon_{ij}(t))$ ($1 \leq i, j \leq 3$) по аналогии с тензором напряжений допускает разложение в виде

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_S(t) + \varepsilon_D(t),$$

где $\varepsilon_S(t)$ – шаровой тензор; $\varepsilon_D(t)$ – девиатор деформаций.

Постановка неизотермической упругопластической задачи базируется на следующих основных положениях.

Принимается, что характер изменения объема тела во всем интервале изменения напряжений и деформаций упругий, т.е. между тензорами $\varepsilon_S(t)$ и $\sigma_S(t)$ существует линейная зависимость

$$\varepsilon_S(t) = \frac{1}{k_0(T(t))} \sigma_S(t) + \varepsilon_S^{(T)}(t), \quad (1)$$

где $k_0(T(t))$ – модуль всестороннего объемного расширения, зависящий от температуры $T(t)$; $\varepsilon_S^{(T)}(t)$ – тензор термических деформаций.

Девиатор полных деформаций $\varepsilon_D(t)$ представим условно в виде суммы упругой и пластической составляющих:

$$\varepsilon_D(t) = \varepsilon_D^{(e)}(t) + \varepsilon_D^{(p)}(t). \quad (2)$$

Упругая составляющая девиатора деформаций определяется обобщенным законом Гука, который для изотропного тела можно представить в виде

$$\varepsilon_D^{(e)}(t) = \frac{1}{2G_0(T(t))} \sigma_D(t), \quad (3)$$

где $G_0(T(t))$ – начальный модуль сдвига, зависящий в общем случае от температуры.

Обозначим через $\bar{\sigma}(t)$, $\bar{\varepsilon}(t)$ – интенсивности девиаторов напряжений $\sigma_D(t)$ и деформаций $\varepsilon_D(t)$, определяемые по соотношениям

$$\bar{\sigma}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma_D(t)\|; \quad \bar{\varepsilon}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\varepsilon_D(t)\|. \quad (4)$$

Здесь и ниже используются такие обозначения: (\cdot, \cdot) – образование свертки двух произвольных тензоров напряжений и деформаций; $\|\cdot\|$ – модуль тензора, определяемый с помощью операции свертки тензора.

Для произвольных тензоров напряжений $\sigma(t)$ и деформаций $\varepsilon(t)$ имеем

$$(\sigma(t), \varepsilon(t)) = \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \sigma_{ij}(t) \varepsilon_{ij}(t);$$

$$\|\sigma(t)\| = \sqrt{(\sigma(t), \sigma(t))}; \quad \|\varepsilon(t)\| = \sqrt{(\varepsilon(t), \varepsilon(t))}.$$

В соответствии с упругопластической моделью среды с изотропным упрочнением поверхность нагружения при пластическом деформировании определяется условием текучести Губера–Мизеса [7] и записывается в виде

$$(\bar{\sigma}(t))^2 - \Psi^2(q_1(t), q_2(t), \dots, T(t), t) = 0, \quad (5)$$

где $\Psi(q_1(t), q_2(t), \dots, T(t), t)$ – скалярный функционал, характеризующий упрочнение материала; $q_1(t), q_2(t), \dots$ – параметры упрочнения.

Пластическая составляющая девиатора деформаций определяется на основе закона пластического течения [7], ассоциированного с поверхностью нагружения (5):

$$d\varepsilon_D^{(p)}(t) = \frac{3}{2} \frac{\overline{d\varepsilon}^{(p)}(t)}{\bar{\sigma}(t)} \sigma_D(t), \quad (6)$$

где $\overline{d\varepsilon}^{(p)}(t)$ – интенсивность бесконечно малых приращений пластических деформаций,

$$\overline{d\varepsilon}^{(p)}(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} \|d\varepsilon_D^{(p)}(t)\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| \frac{d}{dt} \varepsilon_D^{(p)}(t) \right\| dt.$$

Отметим, что при рассмотрении процессов деформирования по траекториям малой кривизны уравнения пластического течения (6) можно получить без использования понятия поверхности нагружения. Действительно,

согласно результатам теории упругопластических процессов, разработанной А. А. Ильюшиным, соотношения процессов малой кривизны можно получить на основе постулата изотропии и принципа запаздывания, которые сформулированы в работе [5] и экспериментально обоснованы для широких классов материалов при комнатной и повышенных температурах.

Заметим, что к процессам малой кривизны относятся те, у которых наименьший радиус кривизны траектории деформирования значительно больше следа запаздывания векторных свойств материала при развитых пластических деформациях [5]. Для этих процессов в соответствии с принципом запаздывания можно полагать, что вектор девиатора напряжений направлен по касательной к траектории пластических деформаций. В этом случае соотношения процессов деформирования по произвольным плоским траекториям существенно упрощаются и преобразуются к уравнениям (6).

Таким образом, определяющие уравнения, описывающие неизотермические процессы упругопластического деформирования по траекториям малой кривизны, состоят из условия упругого изменения объема (1) и соотношений (2), (3), (6), которые равносильны уравнениям состояния Прандля–Рейсса [7, 10]:

$$d\varepsilon_D(t) = d\left(\frac{1}{2G_0(T(t))}\sigma_D(t)\right) + \frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon}^{(p)}(t)}{\overline{\sigma}(t)}\sigma_D(t). \quad (7)$$

Соотношения (6), (7) обычно называют уравнениями теории течения с изотропным упрочнением при неизотермических процессах нагружения. Правомерность этих уравнений содержится в названии “соотношения процессов деформирования по траекториям малой кривизны”.

Интегрирование уравнений пластического течения. При использовании уравнений (7) рассматриваемый процесс нагружения разобьем на временные этапы таким образом, чтобы расчетные моменты времени, разграничивающие этапы нагружения и разгрузки, по возможности совпадали с моментами времени изменения направления процесса деформирования элементов тела от нагружения к разгрузке, и наоборот [1].

Проинтегрируем уравнения пластического течения (6) за этап нагружения. В результате получим равенство

$$\Delta_m \varepsilon_D^{(p)} = \frac{3}{2} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{1}{\overline{\sigma}(t)} \sigma_D(t) \frac{\overline{d\varepsilon}^{(p)}(t)}{dt} dt, \quad (8)$$

где $\Delta_m \varepsilon_D^{(p)}$ – приращения пластических деформаций в конце m -го этапа нагружения,

$$\Delta_m \varepsilon_D^{(p)} = \varepsilon_D^{(p)}(t_m) - \varepsilon_D^{(p)}(t_{m-1}). \quad (9)$$

На основании соотношений (2), (3), (9) находим

$$\varepsilon_D(t_m) - \varepsilon_D^{(p)}(t_{m-1}) = \frac{1}{2G_0(T(t_m))} \sigma_D(t_m) + \Delta_m \varepsilon_D^{(p)}. \quad (10)$$

Таким образом, для формулировки определяющих уравнений теории процессов малой кривизны относительно полных компонентов тензоров напряжений и деформаций необходимо получить явные аналитические выражения для приращений пластических деформаций за этап нагружения.

Как следует из проведенного анализа, такие аналитические формулы могут быть получены в результате использования различного класса приближенных (численных) методов интегрирования уравнений пластического течения (6). И хотя для их решения применяются численные методы интегрирования, приближенное решение всегда можно представить в виде аналитической рекуррентной формулы. На основании этой формулы можно получить явные аналитические выражения для приращений пластических деформаций за этап нагружения. Если эти выражения подставить в уравнение (10), получим определяющие соотношения процессов малой кривизны относительно компонент девиаторов напряжений, полных и пластических деформаций.

Следовательно, исходя из вышеизложенного сформулируем следующую задачу: построить адекватные схемы интегрирования уравнений пластического течения (6) и получить явные аналитические зависимости для определения приращений пластических деформаций за этап нагружения. Понятие “адекватные схемы интегрирования” подчеркивает то, что соответствующие этим схемам интегрирования определяющие уравнения должны быть сформулированы корректно.

Пусть $s = s(t)$ – длина дуги траектории деформирования в пространстве пластических деформаций, определяемая соотношением

$$s(t) = \int_0^t \left\| \frac{d}{dt'} \varepsilon_D^{(p)}(t') \right\| dt'.$$

Полагаем, что на этапе нагружения длина дуги траектории пластических деформаций монотонно увеличивается в процессе деформирования, т.е. за время dt длина дуги $s = s(t)$ получает приращение

$$ds(t) = \frac{ds(t)}{dt} dt = \left\| d\varepsilon_D^{(p)}(t) \right\| > 0.$$

Значит, компоненты тензоров напряжений и деформаций можно рассматривать не только как функции времени t , но и как функции длины траектории s .

Введем в рассмотрение направляющий девиатор напряжений $\hat{\sigma}_D(s)$:

$$\hat{\sigma}_D(s) = \frac{1}{\left\| \sigma_D(s) \right\|} \sigma_D(s). \quad (11)$$

Тогда уравнения (6) можно представить в форме дифференциальных соотношений кинетического типа, описывающих процесс деформирования в пространстве пластических деформаций:

$$\frac{d}{ds} \varepsilon_D^{(p)}(s) = \hat{\sigma}_D(s). \quad (12)$$

Таким образом, математическая модель пластического деформирования представляет собой задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (12), дополненных начальным условием

$$\varepsilon_D^{(p)}(0) = \varepsilon_D^{(0)}, \quad (13)$$

где $\varepsilon_D^{(0)}$ – девиатор начальных необратимых деформаций в упругопластическом теле.

Точные аналитические решения задачи Коши для уравнений (12), (13) могут быть получены для отдельных классов нагрузок, например для простых процессов нагружения. Для большинства представляющих практический интерес задач применить аналитические методы к решению уравнений (12), (13) невозможно.

Цель данной работы состоит в описании адекватных способов построения приближенных решений задачи Коши на основе одношаговых методов интегрирования уравнений течения (12).

Исходные концептуальные предпосылки для построения приближенных решений уравнений (12), (13) могут быть разными. К настоящему времени можно выделить три подхода, имеющих общие характерные особенности.

Первый подход основан на разложении компонент девиатора пластических деформаций в ряд Тейлора [6] и использовании конечноразностных методов. Простейшей численной схемой этого класса методов является явный метод Эйлера первого порядка точности [9]. Среди других разностных методов отметим метод Рунге-Кутты [9], имеющий погрешность второго порядка.

Второй – базируется на интегрировании дифференциальных уравнений (12) за этап нагружения (деформирования), что приводит к определению интегралов относительно компонент направляющего девиатора напряжений. Если для их вычисления использовать различные аппроксимации, получим соответствующие схемы интегрирования уравнений (12). Самый простой способ аппроксимации состоит в применении формул численного интегрирования [9], другой способ – в использовании кусочно-полиномиальной интерполяции компонент направляющего девиатора напряжений с последующим точным интегрированием интерполяционного полинома [9].

Третий подход является, по-видимому, наиболее общим и основывается на построении приближенных решений уравнений (12), (13) с помощью методики, принятой в проекционных методах [11]. Умножим левую и правую части дифференциальных уравнений (12) на произвольную непрерывную функцию $\mu(s)$ и приращение ds , а затем проинтегрируем полученные равенства за этап деформирования. В результате получим интегральное тождество

$$\int_{s_{n-1}}^{s_n} \left(\frac{d}{ds} \varepsilon_D^{(p)}(s) \right) \mu(s) ds = \int_{s_{n-1}}^{s_n} \hat{\sigma}_D(s) \mu(s) ds, \quad (14)$$

где

$$s_{n-1} = s(t_{n-1}); \quad s_n = s(t_n).$$

Интегральное тождество (14) получено путем “проектирования” уравнений пластического течения (12) на множество допустимых функций $\mu(s)$. Заметим, что проекционная форма интегрального тождества (14) близка к равенствам, которые имеют место в проекционном методе Петрова–Галеркина и методе Бубнова–Галеркина [11].

Итак, если в пределах исследуемого интервала деформирования девиатор пластических деформаций $\varepsilon_D^{(p)}(s)$, направляющий девиатор напряжений $\hat{\sigma}_D(s)$ и функцию $\mu(s)$ аппроксимировать по их значениям на границах интервала $[s_{n-1}, s_n]$, получим семейство двухслойных ω -схем интегрирования уравнений пластического течения (12):

$$\tilde{\Delta}_n \varepsilon_D^{(p)} = (\omega \hat{\sigma}_D(s_n) + (1 - \omega) \hat{\sigma}_D(s_{n-1})) \int_{s_{n-1}}^{s_n} ds, \quad (15)$$

где ω – весовой множитель, значение которого определяет вид схемы интегрирования.

Относительно выбора весового множителя ω полагаем, что он не может принимать отрицательные и сколь угодно большие значения. Более того, будем рассматривать только те схемы интегрирования (15), в которых допускаемые значения весового множителя ω ограничены неравенствами

$$\hat{\omega} < \omega \leq 1, \quad (16)$$

где $\hat{\omega}$ – нижнее пороговое значение множителя ω , которое необходимо оценить.

Приведем некоторые варианты, следующие из формулы (15), как частные случаи семейства ω -схем интегрирования уравнений (12).

Если в интегральном тождестве (14) функцию $\mu(s)$ положить равной единице, а направляющий девиатор напряжений $\hat{\sigma}_D(s)$ аппроксимировать зависимостью

$$\hat{\sigma}_D(s) = \hat{\sigma}_D(s_n),$$

придем к методу Петрова–Галеркина, откуда следует неявная схема интегрирования (15) с весовым множителем $\omega = 1$, которую использует В. И. Махненко.

Кроме того, если в тождестве (14) положить $\mu(s) = 1$, а направляющий девиатор напряжений $\hat{\sigma}_D(s)$ аппроксимировать с помощью линейной интерполяции

$$\hat{\sigma}_D(s) = \frac{s_n - s}{s_n - s_{n-1}} \hat{\sigma}_D(s_{n-1}) + \frac{s - s_{n-1}}{s_n - s_{n-1}} \hat{\sigma}_D(s_n), \quad (17)$$

получим схему интегрирования метода Рунге–Кутты с весовым множителем $\omega = 1/2$, известную в теории конечноразностных методов как схема Кранка–

Николсона второго порядка точности [9]. Формулу интегрирования (15) с весовым множителем $\omega = 1/2$ использует в своих работах Ю. Н. Шевченко.

Более общий подход основан на применении линейной интерполяции девиатора пластических деформаций $\varepsilon_D^{(p)}(s)$, направляющего девиатора напряжений $\hat{\sigma}_D(s)$ и функции $\mu(s)$ в пределах рассматриваемого интервала деформирования.

При использовании линейной интерполяции девиатора пластических деформаций $\varepsilon_D^{(p)}(s)$ получим следующее выражение для производной:

$$\frac{d}{ds} \varepsilon_D^{(p)}(s) = \frac{1}{s_n - s_{n-1}} (\varepsilon_D^{(p)}(s_n) - \varepsilon_D^{(p)}(s_{n-1})). \quad (18)$$

Кроме того, следует учитывать, что значения компонент девиаторов $\varepsilon_D^{(p)}(s_{n-1})$ и $\hat{\sigma}_D(s_{n-1})$ известны, и, значит, функция $\mu(s)$ задается в виде

$$\mu(s) = \frac{s - s_{n-1}}{s_n - s_{n-1}} \mu(s_n). \quad (19)$$

Если соотношения (17)–(19) подставить в интегральное тождество (14), получим схему интегрирования метода Бубнова–Галеркина с весовым множителем $\omega = 2/3$.

Возможны и другие подходы построения схем интегрирования уравнений пластического течения (12), однако в данной работе они не рассматриваются.

Оценим погрешность формулы (15) при вычислении приращений пластических деформаций за этап деформирования. С этой целью запишем равенства:

$$\begin{aligned} \Delta_n \varepsilon_D^{(p)} - \tilde{\Delta}_n \varepsilon_D^{(p)} &= \int_{s_{n-1}}^{s_n} \hat{\sigma}_D(s) ds - (\omega \hat{\sigma}_D(s_n) + (1 - \omega) \hat{\sigma}_D(s_{n-1})) \int_{s_{n-1}}^{s_n} ds = \\ &= \int_{s_{n-1}}^{s_n} [\omega(\hat{\sigma}_D(s) - \hat{\sigma}_D(s_n)) + (1 - \omega)(\hat{\sigma}_D(s) - \hat{\sigma}_D(s_{n-1}))] ds, \end{aligned}$$

откуда с учетом оценки погрешности интегрирования по формуле прямоугольников [9] находим

$$\|\Delta_n \varepsilon_D^{(p)} - \tilde{\Delta}_n \varepsilon_D^{(p)}\| \leq \frac{1}{2} |1 - 2\omega| |s_n - s_{n-1}|^2 \max_{s_{n-1} \leq s \leq s_n} |k(s)|, \quad (20)$$

где $k = k(s)$ – параметр кривизны траектории деформирования в пространстве пластических деформаций, определяемый соотношением

$$k(s) = \pm \left| \frac{d^2}{ds^2} \varepsilon_D^{(p)}(s) \right|.$$

Поскольку рассматриваются процессы деформирования по траекториям малой кривизны, величина параметра $|k(s)|$ ограничена сверху, и, значит, согласно полученной оценке (20) формула (15) имеет погрешность второго порядка относительно приращения длины траектории пластических деформаций за этап деформирования.

Оценим погрешность формулы (15) при вычислении девиатора пластических деформаций $\tilde{\varepsilon}_D^{(p)}(s_m)$ в конце m -го этапа деформирования с помощью равенства

$$\varepsilon_D^{(p)}(s_m) - \tilde{\varepsilon}_D^{(p)}(s_m) = \sum_{n=1}^m (\Delta_n \varepsilon_D^{(p)} - \tilde{\Delta}_n \varepsilon_D^{(p)}),$$

откуда с учетом неравенства треугольника [9] и оценки (20) находим

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_D^{(p)}(s_m) - \tilde{\varepsilon}_D^{(p)}(s_m)\| &= \left\| \sum_{n=1}^m (\Delta_n \varepsilon_D^{(p)} - \tilde{\Delta}_n \varepsilon_D^{(p)}) \right\| \leq \sum_{n=1}^m \|\Delta_n \varepsilon_D^{(p)} - \tilde{\Delta}_n \varepsilon_D^{(p)}\| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} |1 - 2\omega| \sum_{n=1}^m |s_n - s_{n-1}|^2 \max_{s_{n-1} \leq s \leq s_n} |k(s)|. \end{aligned}$$

Следовательно, справедлива оценка

$$\|\varepsilon_D^{(p)}(s_m) - \tilde{\varepsilon}_D^{(p)}(s_m)\| \leq \frac{s_m}{2} |1 - 2\omega| \max_{n=1, \dots, m} |s_n - s_{n-1}| \max_{0 \leq s \leq s_m} |k(s)|. \quad (21)$$

Согласно оценке (21), вычисление девиатора пластических деформаций с использованием формулы интегрирования (15) вносит погрешность первого порядка относительно максимального приращения длины траектории пластических деформаций за этап деформирования.

Кроме того, на основании оценки (21) и равенства

$$|k(s)| = \left| \frac{d}{ds} \hat{\sigma}_D(s) \right|$$

можно сделать следующее замечание. Если в процессе деформирования направляющий девиатор напряжений $\hat{\sigma}_D(s)$ изменяется “достаточно плавно” относительно аргумента s , то применение формулы (15), по-видимому, не дает большой погрешности.

Следует также отметить, что при использовании схемы интегрирования Кранка–Николсона с весовым множителем $\omega = 1/2$ погрешность вычисления девиатора пластических деформаций на основе формулы (15) имеет второй порядок точности.

Формулировка определяющих уравнений. При формулировке определяющих соотношений процессов малой кривизны будем рассматривать семейство двухслойных ω -схем интегрирования уравнений пластического течения (12). Для определения приращений пластических деформаций за этап нагружения используем формулу (15), в которой для упрощения формы записи уравнений опускаем верхний символ “ \sim ”.

На основании формулы (15) выражение для приращений пластических деформаций за этап нагружения можно представить в следующем виде:

$$\Delta_m \varepsilon_D^{(p)} = \frac{3}{2} \left(\frac{\omega}{\bar{\sigma}(t_m)} \sigma_D(t_m) + \frac{1-\omega}{\bar{\sigma}(t_{m-1})} \sigma_D(t_{m-1}) \right) \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{\overline{d\varepsilon}^{(p)}(t)}{dt} dt. \quad (22)$$

Введем в рассмотрение положительную скалярную функцию $G_s(t_m)$, зависящую от параметра ω и определяемую по соотношению

$$\frac{1}{G_s(t_m)} = \frac{1}{G_0(t_m)} + \frac{3\omega}{\bar{\sigma}(t_m)} \int_{t_{m-1}}^{t_m} \frac{\overline{d\varepsilon}^{(p)}(t)}{dt} dt. \quad (23)$$

Тогда в соответствии с формулами (22) и (23) находим

$$\Delta_m \varepsilon_D^{(p)} = \left(\frac{1}{2G_s(t_m)} - \frac{1}{2G_0(t_m)} \right) (\sigma_D(t_m) + \check{\sigma}_D(t_{m-1})), \quad (24)$$

где $\check{\sigma}_D(t_{m-1})$ – девиатор “дополнительных” напряжений,

$$\check{\sigma}_D(t_{m-1}) = \frac{1-\omega}{\omega} \frac{\bar{\sigma}(t_m)}{\bar{\sigma}(t_{m-1})} \sigma_D(t_{m-1}). \quad (25)$$

Согласно уравнениям (10) и (24) имеем

$$\varepsilon_D(t_m) - \varepsilon_D^{(p)}(t_{m-1}) = \frac{1}{2G_s(t_m)} \sigma_D(t_m) + \left(\frac{1}{2G_s(t_m)} - \frac{1}{2G_0(t_m)} \right) \check{\sigma}_D(t_{m-1}), \quad (26)$$

откуда следует выражение для девиатора напряжений $\sigma_D(t_m)$:

$$\sigma_D(t_m) = 2G_s(t_m) (\varepsilon_D(t_m) - \varepsilon_D^{(p)}(t_{m-1})) - \left(\frac{1}{2G_s(t_m)} - \frac{1}{2G_0(t_m)} \right) \check{\sigma}_D(t_{m-1}). \quad (27)$$

Таким образом, на основании соотношений (1) и (27) определяющие уравнения теории процессов деформирования по траекториям малой кривизны можно представить в виде

$$\sigma(t_m) = k_0(T(t_m))(\varepsilon_S(t_m) - \xi_S(t_m)) + 2G_s(t_m)(\varepsilon_D(t_m) - \xi_D(t_m)), \quad (28)$$

где $\xi(t_m)$ – тензор начальных деформаций,

$$\xi(t_m) = \varepsilon_S^{(T)}(t_m) + \varepsilon_D^{(p)}(t_{m-1}) + \left(\frac{1}{2G_s(t_m)} - \frac{1}{2G_0(t_m)} \right) \bar{\sigma}_D(t_{m-1}). \quad (29)$$

Отметим, что уравнения (28) по форме совпадают с уравнениями теории простых процессов деформирования, в частности теории малых упругопластических деформаций [5]. Тем не менее такое совпадение является совершенно формальным. Начальные деформации в уравнениях (28) определяются формулой (29) и обусловлены не только неравномерным нагревом тела, но и историей упругопластического деформирования.

Обозначим через $\varepsilon_D^{(a)}(t_m)$ – девиатор активных деформаций, возникающих в элементе тела дополнительно к начальным деформациям $\xi_D(t_m)$ в конце m -го этапа нагружения:

$$\varepsilon_D^{(a)}(t_m) = \varepsilon_D(t_m) - \xi_D(t_m). \quad (30)$$

Тогда уравнения (28) можно записать в виде

$$\sigma_D(t_m) = 2G_s(t_m)\varepsilon_D^{(a)}(t_m). \quad (31)$$

Если подставить выражение (31) в формулу для интенсивности девиатора напряжений (5), получим

$$G_s(t_m) = \frac{\bar{\sigma}(t_m)}{3\bar{\varepsilon}^{(a)}(t_m)}, \quad (32)$$

где $\bar{\varepsilon}^{(a)}(t_m)$ – интенсивность девиатора активных деформаций $\varepsilon_D^{(a)}(t_m)$,

$$\bar{\varepsilon}^{(a)}(t_m) = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\varepsilon_D^{(a)}(t_m)\|. \quad (33)$$

Из формулы (32) следует, что при фиксированных значениях интенсивностей девиаторов напряжений и активных деформаций скалярную функцию G_s можно интерпретировать как “секущий модуль сдвига” материала. Заметим, однако, что такая интерпретация формулы (32) носит формальный характер, поскольку интенсивность девиатора активных деформаций также определяется с использованием секущего модуля сдвига, что явно следует из формул (29), (30), (33).

Таким образом, нелинейность уравнений (28), (29), (32) зависит от двух факторов: первый обусловлен зависимостью секущего модуля сдвига от интен-

сивностей девиаторов напряжений и активных деформаций, что следует из выражения (32), второй – зависимостью девиатора начальных деформаций от интенсивности девиатора напряжений и секущего модуля сдвига материала, что прямо следует из формул (25), (29).

Заметим, что интенсивность девиатора напряжений можно выразить через интенсивность девиатора активных деформаций с помощью функциональной зависимости, описывающей упрочнение материала. В таком случае секущий модуль сдвига и девиатор начальных деформаций будут зависеть только от интенсивности девиатора активных деформаций. Тем не менее к началу этапа нагружения интенсивность девиатора активных деформаций для рассматриваемого этапа нагружения является неизвестной функцией, что, по сути, и приводит к нелинейности уравнений (28), (29), (32).

Вычисление пластических деформаций. Пластические деформации в конце m -го этапа нагружения определяются на основании формул (2) и (3), откуда следует выражение

$$\varepsilon_D^{(p)}(t_m) = \varepsilon_D(t_m) - \frac{1}{2G_0(T(t_m))} \sigma_D(t_m),$$

которое с учетом уравнений (28) можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_D^{(p)}(t_m) = \varepsilon_D^{(p)}(t_{m-1}) + \left(1 - \frac{G_s(t_m)}{G_0(t_m)}\right) \varepsilon_D^{(m)}(t_m), \quad (34)$$

где $\varepsilon_D^{(m)}(t_m)$ – модифицированный девиатор деформаций, определяемый выражением

$$\varepsilon_D^{(m)}(t_m) = \varepsilon_D(t_m) - \varepsilon_D^{(p)}(t_{m-1}) + \frac{1}{2G_0(t_m)} \check{\sigma}_D(t_{m-1}). \quad (35)$$

Вычисление параметра Одквиста. Параметр Одквиста $q(t_m)$, характеризующий накопленную пластическую деформацию в конце m -го этапа нагружения, определяется по соотношению

$$q(t_m) = \int_0^{t_m} \frac{\overline{d\varepsilon}^{(p)}(t)}{dt} dt. \quad (36)$$

Очевидно, что этот параметр имеет простой геометрический смысл, а именно: с точностью до множителя $\sqrt{2/3}$ равен длине дуги траектории деформирования в пространстве пластических деформаций.

Если в формуле (36) учесть свойство аддитивности определенного интеграла, то получим

$$q(t_m) = \sum_{n=1}^m \Delta_n q = q(t_{m-1}) + \Delta_m q, \quad (37)$$

где приращение $\Delta_n q$ вычисляется на основании формулы (23):

$$\Delta_n q = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{d\bar{\varepsilon}^{(p)}(t)}{dt} dt = \left(\frac{1}{G_s(t_n)} - \frac{1}{G_0(t_n)} \right) \frac{\bar{\sigma}(t_n)}{3\omega}. \quad (38)$$

С использованием соотношений (3), (32) и (38) находим

$$\bar{\varepsilon}^{(e)}(t_n) = \frac{G_s(t_n)}{G_0(T(t_n))} \bar{\varepsilon}^{(a)}(t_n); \quad \Delta_n q = \left(1 - \frac{G_s(t_n)}{G_0(T(t_n))} \right) \frac{\bar{\varepsilon}^{(a)}(t_n)}{\omega}, \quad (39)$$

откуда следует равенство, с помощью которого устанавливается взаимосвязь между интенсивностями активных и упругих деформаций с приращением параметра Одквиста:

$$\bar{\varepsilon}^{(a)}(t_n) = \bar{\varepsilon}^{(e)}(t_n) + \omega \Delta_n q. \quad (40)$$

Согласно равенству (40), интенсивность девиатора активных деформаций можно представить в виде суммы интенсивности девиатора упругих деформаций и некоторой части приращения параметра Одквиста, величина которой зависит от значения весового множителя схемы интегрирования (22).

Геометрическая интерпретация соотношений (32), (40) представлена на рис. 1.

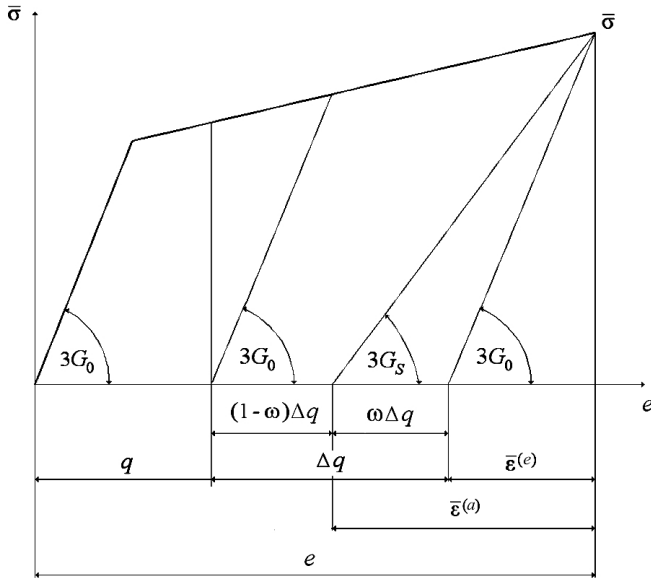


Рис. 1. Обобщенная диаграмма деформирования материала.

Построение функциональной зависимости, описывающей упрочнение материала. Обычно в теориях пластического течения инкрементального типа принимается, что для рассматриваемого материала интенсивность девиатора напряжений $\bar{\sigma}(t)$ является функционалом параметра Одквиста $q(t)$, температуры $T(t)$ и, возможно, времени t :

$$\bar{\sigma}(t) = \Psi(q(t), T(t), t). \quad (41)$$

Однако для определяющих соотношений (28), (29) и (32) необходимо построить другую, отличную от выражения (41), функциональную зависимость, характеризующую упрочнение материала при пластическом деформировании.

Итак, на основании уравнения (32) полагаем, что для исследуемого материала интенсивность девиатора напряжений $\bar{\sigma}(t)$ является функционалом интенсивности девиатора активных деформаций $\bar{\varepsilon}^{(a)}(t)$, температуры $T(t)$ и времени t :

$$\bar{\sigma}(t) = \Psi(\bar{\varepsilon}^{(a)}(t), T(t), t). \quad (42)$$

Разумеется, что такое определение не является полным, поскольку не учитывается влияние упрочнения, которое материал приобретает в процессе предыдущего пластического деформирования. Действительно, для рассматриваемого момента времени t при соответствующей температуре $T(t)$ величина интенсивности девиатора напряжений $\bar{\sigma}(t)$ определяется не только значением интенсивности девиатора активных деформаций $\bar{\varepsilon}^{(a)}(t)$ в данный момент времени t , но и упрочнением материала в момент времени $\tau < t$.

Из этого следует, что функциональная зависимость (42) должна описывать процесс упругопластического деформирования с учетом начального упрочнения материала, а именно: упрочнения материала к началу этапа нагружения. Исходя из этого представим функциональную зависимость (42) в более полном виде:

$$\bar{\sigma}(t) = \Psi(\bar{\varepsilon}^{(a)}(t), q(\tau), T(t), t), \quad \tau < t, \quad (43)$$

где в качестве дополнительного аргумента $q(\tau)$ принимается параметр, характеризующий упрочнение материала к началу текущего этапа нагружения. Заметим, что параметр упрочнения $q(\tau)$ определяется всей историей процесса деформирования и, следовательно, в зависимости (43) этот параметр может описывать историю нагружения. Простейшее предположение о характере упрочнения состоит в том, что за меру упрочнения принимается величина накопленной пластической деформации, т.е. параметр Одвишта.

Отметим, что при изотермических процессах нагружения функционал (43) можно интерпретировать как поверхность деформирования с начальным упрочнением. При неизотермических процессах он описывает множество термомеханических поверхностей в зависимости от величины упрочнения. Для фиксированных значений параметра упрочнения $q(\tau)$ функционал (43) можно интерпретировать как термомеханическую поверхность с начальным упрочнением.

Для конкретизации функциональной зависимости (43) используем деформационный параметр $e(t)$, характеризующий упрочнение материала в процессе упругопластического деформирования в каждой точке тела. Определим его как сумму накопленной пластической деформации и интенсивности девиатора упругих деформаций:

$$e(t) = q(t) + \bar{\varepsilon}^{(e)}(t). \quad (44)$$

С использованием соотношений (37), (40) и (44) находим

$$e(t) = q(\tau) + \Delta q + \bar{\varepsilon}^{(e)}(t) = q(\tau) + \bar{\varepsilon}^{(a)}(t) + (1 - \omega)\Delta q,$$

откуда с учетом второй формулы (39) получим выражение

$$e(t) = q(\tau) + \gamma(t)\bar{\varepsilon}^{(a)}(t), \quad (45)$$

где множитель $\gamma(t)$ задается в виде

$$\gamma(t) = \frac{1}{\omega} - \frac{1 - \omega}{\omega} \frac{G_s(t)}{G_0(T(t))}. \quad (46)$$

Из анализа формул (44) и (45) можно сделать следующие замечания. Согласно формуле (44), параметр $e(t)$ характеризует полную накопленную деформацию в процессе упругопластического деформирования материала в каждой точке тела. Кроме того, из формулы (45) следует, что данный параметр можно определить с помощью параметра начального упрочнения $q(\tau)$ и интенсивности девиатора активных деформаций $\bar{\varepsilon}^{(a)}(t)$.

На основании вышеизложенного функциональную зависимость (43) можно представить в следующем виде:

$$\bar{\sigma}(t) = \Psi(e(t), T(t), t). \quad (47)$$

Полагаем, что функционал (47) не зависит от кривизны траектории, гидростатического давления, вида девиатора напряжений и определяется из опытов на простое растяжение цилиндрических образцов при различных фиксированных температурах.

Таким образом, определяющие соотношения теории процессов малой кривизны, сформулированные в виде уравнений (28), (29), (32), следует дополнить функциональной зависимостью (47). Характерной особенностью определяющих уравнений является то, что они записаны в единой форме независимо от характера процессов нагружения, что позволяет их применять при описании простых процессов активного нагружения, процессов деформирования по траекториям малой кривизны, разгрузки и повторного нагружения.

Дальнейшая конкретизация функциональной зависимости (47) выполняется на основе уравнения мгновенной термомеханической поверхности:

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}, T), \quad (48)$$

где под деформацией $\bar{\varepsilon}$ понимается только чисто силовая составляющая, т.е. полная деформация минус тепловая. Заметим, что уравнение мгновенной термомеханической поверхности представляет собой геометрическое место диаграмм деформирования образцов, построенных при различных фиксированных значениях температуры.

Если для конкретизации функциональной зависимости (47) использовать уравнение мгновенной термомеханической поверхности (48), то необходимо установить соответствие между сложным напряженно-деформированным состоянием элемента тела и простым растяжением образца. Полагаем, что при одноосном растяжении образца параметр e отождествляется с полной деформацией $\bar{\varepsilon}$, а параметр q , характеризующий упрочнение материала, ассоциируется с пластической деформацией образца. Тогда с учетом линейной зависимости на упругом участке деформирования получим

$$\Psi(e, T) = \begin{cases} 3G_0(T)(e - q), & e \leq e_p; \\ f(e, T), & e > e_p, \end{cases} \quad (49)$$

где e_p – деформация, соответствующая мгновенному пределу пропорциональности $f(e_p, T)$, зависящему от накопленной пластической деформации q и температуры T .

На основании (49) получим уравнение для определения e_p :

$$f(e_p, T) = 3G_0(T)(e_p - q). \quad (50)$$

С использованием соотношений (32) и (50) находим

$$G_s(e, T) = \begin{cases} G_0(T), & e \leq e_p; \\ \frac{f(e, T)}{3\bar{\varepsilon}^{(a)}}, & e > e_p. \end{cases}$$

Замечание об определении деформации e_p . Допустим, что при фиксированной температуре T используется кусочно-линейная аппроксимация функции $f(e, T)$ в зависимости от деформации e . Для этого весь интервал изменения e разбивается на отрезки $[e_{n-1}, e_n]$ и в пределах каждого из них задается линейная интерполяция следующего вида:

$$f(e, T) = f(e_{n-1}, T) + 3g_n(T)(e - e_{n-1}), \quad (51)$$

где $g_n(T)$ – линейный модуль упрочнения на отрезке $[e_{n-1}, e_n]$,

$$g_n(T) = \frac{f(e_n, T) - f(e_{n-1}, T)}{3(e_n - e_{n-1})}.$$

Тогда на основании формул (50) и (51) получим выражение для определения деформации e_p :

$$e_p = \frac{f(e_{n-1}, T) + 3(G_0(T)q - g_n(T)e_{n-1})}{3(G_0(T) - g_n(T))}.$$

Замечание о параметре Одквиста. Покажем, что для рассматриваемых уравнений пластичности (28), (29), (32) приращение параметра Одквиста не равно интенсивности приращений пластических деформаций за этап нагружения. Более точно это утверждение формулируется следующим образом. Если значения весового множителя ω удовлетворяют условию

$$\frac{1}{2} < \omega < 1, \quad (52)$$

справедливо неравенство

$$\Delta_m q \neq \overline{\Delta_m \varepsilon}^{(p)}, \quad (53)$$

где $\overline{\Delta_m \varepsilon}^{(p)}$ – интенсивность приращений пластических деформаций за этап нагружения,

$$\overline{\Delta_m \varepsilon}^{(p)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\Delta_m \varepsilon_D^{(p)}\|. \quad (54)$$

Действительно, девиатор активных деформаций можно представить в виде

$$\varepsilon_D^{(a)}(t_m) = \varepsilon_D^{(m)}(t_m) - \frac{1}{2G_s(t_m)} \check{\sigma}_D(t_{m-1}),$$

где девиатор деформаций $\varepsilon_D^{(m)}(t_m)$ определяется по формуле (35).

Тогда в соответствии с неравенством треугольника получим такие оценки:

$$\begin{aligned} \|\varepsilon_D^{(a)}(t_m)\| &\leq \|\varepsilon_D^{(m)}(t_m)\| + \frac{1}{2G_s(t_m)} \|\check{\sigma}_D(t_{m-1})\|; \\ \|\varepsilon_D^{(m)}(t_m)\| &\leq \|\varepsilon_D^{(a)}(t_m)\| + \frac{1}{2G_s(t_m)} \|\check{\sigma}_D(t_{m-1})\|. \end{aligned} \quad (55)$$

На основании (32), (35), (52), (55) приходим к неравенствам

$$\frac{2\omega - 1}{\omega} \|\varepsilon_D^{(a)}(t_m)\| \leq \|\varepsilon_D^{(m)}(t_m)\| \leq \frac{1}{\omega} \|\varepsilon_D^{(a)}(t_m)\|. \quad (56)$$

Согласно равенству (34), имеем

$$\|\Delta_m \varepsilon_D^{(p)}\| = \left(1 - \frac{G_s(t_m)}{G_0(T(t_m))}\right) \|\varepsilon_D^{(m)}(t_m)\|, \quad (57)$$

и с учетом (39), (54), (56) и (57) находим

$$(2\omega - 1)\Delta_m q \leq \overline{\Delta_m \varepsilon}^{(p)} \leq \Delta_m q.$$

Таким образом, получим неравенства

$$0 \leq \Delta_m q - \overline{\Delta_m \varepsilon}^{(p)} \leq 2(1 - \omega) \Delta_m q,$$

откуда следует (53). Исключением является схема интегрирования (15) с весовым множителем $\omega = 1$, для которой имеет место равенство $\Delta_m q = \overline{\Delta_m \varepsilon}^{(p)}$ и принимается допущение о неизменности компонент направляющего девиатора напряжений на этапе нагружения.

Дифференциальная форма уравнений пластического течения. Покажем, что дифференциальные уравнения пластического течения, соответствующие определяющим соотношениям (28), (29), (32), относятся к уравнениям так называемой сингулярной пластичности, т.е. теории с особой точкой на поверхности нагружения. При этом следует иметь в виду, что природа сингулярности обусловлена не физическими закономерностями деформирования упругопластической среды, а приближенным интегрированием уравнений пластического течения (6) за этап нагружения.

Итак, пусть тело находится в пластическом состоянии, которое в рассматриваемый момент времени характеризуется напряжениями σ_D . Сообщим последним бесконечно малые приращения $d\sigma_D$, приводящие к дополнительной пластической деформации. Вычислим бесконечно малые приращения пластических деформаций при заданном догружении $d\sigma_D$. Для этого используем соотношение (24) для конечных приращений пластических деформаций за этап нагружения, откуда следует

$$d\varepsilon_D^{(p)} = d \left(\left(\frac{1}{2G_s} - \frac{1}{2G_0} \right) \sigma'_D \right), \quad (58)$$

где σ'_D – девиатор “суммарных” напряжений,

$$\sigma'_D = \sigma_D + \check{\sigma}_D. \quad (59)$$

Продифференцируем правую часть равенства (58). Согласно правилам дифференцирования сложных функций, имеем

$$d\varepsilon_D^{(p)} = d \left(\frac{1}{2G_s} \right) \sigma'_D + \left(\frac{1}{2G_s} - \frac{1}{2G_0} \right) d\sigma'_D. \quad (60)$$

Кроме того, с учетом формулы (32) находим

$$d \left(\frac{1}{G_s} \right) = d \left(\frac{3\bar{\varepsilon}^{(a)}}{f(e)} \right) = \frac{df(e)}{f(e)} \left(\frac{d\bar{\varepsilon}^{(a)}}{de} \frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_s} \right), \quad (61)$$

где G_t – касательный модуль сдвига материала,

$$G_t = \frac{1}{3} \frac{df(e)}{de}. \quad (62)$$

При дифференцировании соотношения (44) получим

$$de = d(\gamma \bar{\varepsilon}^{(a)}) = (d\gamma) \bar{\varepsilon}^{(a)} + \gamma d\bar{\varepsilon}^{(a)}, \quad (63)$$

где приращение $d\gamma$ определяется на основании формулы (46):

$$d\gamma = \frac{1-\omega}{\omega} \frac{G_s^2}{G_0} d\left(\frac{1}{G_s}\right). \quad (64)$$

Если выражение (61) подставить в формулу (64), а затем полученное выражение для приращения $d\gamma$ в правую часть равенства (63), придем к соотношению

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^{(a)}}{de} = \omega + (1-\omega) \frac{G_t}{G_0}. \quad (65)$$

С учетом формулы (65) выражение (61) принимает вид

$$d\left(\frac{1}{G_s}\right) = \left(\frac{1}{G_\omega} - \frac{1}{G_s}\right) \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}}, \quad (66)$$

где G_ω – “комбинированный” модуль сдвига, определяемый с помощью линейной комбинации:

$$\frac{1}{G_\omega} = \frac{\omega}{G_t} + \frac{1-\omega}{G_0}. \quad (67)$$

На основании формул (60), (66) получим уравнение для бесконечно малых приращений пластических деформаций:

$$d\varepsilon_D^{(p)} = \left(\frac{1}{2G_\omega} - \frac{1}{2G_s}\right) \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \sigma'_D + \left(\frac{1}{2G_s} - \frac{1}{2G_0}\right) d\sigma'_D. \quad (68)$$

Приведем выражение для приращения напряжений $d\sigma'_D$, используемое в формуле (68). Если учесть, что девиатор напряжений σ'_D задается в виде суммы (59), справедливо равенство

$$d\sigma'_D = d\sigma_D + d\tilde{\sigma}_D. \quad (69)$$

Кроме того, приращение $d\tilde{\sigma}_D$ определяется на основании выражения (25), откуда следует

$$d\tilde{\sigma}_D = \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \tilde{\sigma}_D. \quad (70)$$

С учетом формул (59), (69) и (70) уравнение (68) принимает вид

$$d\varepsilon_D^{(p)} = \left(\frac{1}{2G_\omega} - \frac{1}{2G_s} \right) \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \sigma_D + \left(\frac{1}{2G_s} - \frac{1}{2G_0} \right) d\sigma_D + \left(\frac{1}{2G_\omega} - \frac{1}{2G_0} \right) \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \check{\sigma}_D. \quad (71)$$

Сделаем некоторые замечания относительно свойств уравнения (71), представив его в несколько иной форме, а именно:

$$d\varepsilon_D^{(p)} = \left(\frac{1}{2G_\omega} - \frac{1}{2G_0} \right) \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \sigma'_D + \left(\frac{1}{2G_s} - \frac{1}{2G_0} \right) \left(d\sigma_D - \frac{d\bar{\sigma}}{\bar{\sigma}} \sigma_D \right). \quad (72)$$

Прежде всего, при пропорциональном нагружении в уравнении (72) остается только первое слагаемое, которое в данном случае преобразуется к основному уравнению теории течения при изотропном упрочнении, т.е. к уравнению пластического течения (6).

Из уравнения (72) также следует, что при нейтральном догружении первое слагаемое исчезает, но остается второе слагаемое, и, значит, при нейтральном догружении могут происходить изменения отдельных компонент девиатора пластических деформаций.

Таким образом, при произвольном догружении второе слагаемое в уравнении (72) определяет приращение компонент девиатора пластических деформаций, обусловленное поворотом главных осей при бесконечно малом приращении компонент девиатора напряжений.

Кроме того, обращаясь к уравнению (71), и, следуя рассуждениям, приведенным в [12], отметим, что поверхность нагружения не может быть гладкой, поскольку для нее направление вектора приращений пластических деформаций зависит только от вектора напряжения σ_D , но не от вектора догрузки $d\sigma_D$ и вектора напряжения $\check{\sigma}_D$. Первое слагаемое в уравнении (71) удовлетворяет этому условию, второе – зависит от вектора приращения $d\sigma_D$, третье – от вектора напряжения $\check{\sigma}_D$, и, значит, вектор приращений пластических деформаций в процессе догружения может менять свое направление в зависимости от соотношения компонент указанных векторов. Следовательно, конец вектора напряжения σ_D является угловой точкой поверхности нагружения.

Отметим, что уравнения (71), (72) не позволяют сделать каких-либо конкретных заключений о виде поверхности нагружения в окрестности угловой точки. Из этих уравнений следует тот факт, что для некоторых видов нагружений, отличных от пропорционального, последующие поверхности нагружения, ограничивающие область упругой разгрузки, могут иметь угловую точку, перемещающуюся по траектории нагружения вместе с концом вектора напряжения.

Замечания о корректности определяющих уравнений. Приведем некоторые вполне очевидные соображения относительно условий применимости определяющих уравнений (28), (29), (32).

Естественно допустить, что корректность определяющих уравнений (28), (29), (32) будет иметь место только в случае если не нарушаются некоторые общие принципы, полагаемые в основу теории течения любого вида. В связи с этим необходимо выяснить условия, при которых уравнения пластичности (28), (29), (32) согласуются с принципом необратимости работы на приращенных пластических деформаций и постулатом упрочнения Друкера.

Проверим выполнение условия необратимости, которое заключается в том, что приращение работы пластического формоизменения есть величина положительная:

$$dA = (\sigma_D, d\varepsilon_D^{(p)}) > 0. \quad (73)$$

Для этого необходимо учитывать, что девиатор дополнительных напряжений $\check{\sigma}_D$ определяется в соответствии с формулой (25), откуда следует

$$\check{\sigma}_D = \frac{1-\omega}{\omega} \|\sigma_D\| \hat{\sigma}_D, \quad (74)$$

где $\hat{\sigma}_D$ – направляющий девиатор напряжений для предыдущего этапа нагружения, его модуль равен единице, т.е. $\|\hat{\sigma}_D\| = 1$.

Кроме того, приращение интенсивности девиатора напряжений $d\bar{\sigma}$ задается в виде

$$d\bar{\sigma} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} (\sigma_D, d\sigma_D), \quad (75)$$

и, значит, при подстановке в формулу (73) выражения для приращений пластических деформаций (71) с учетом соотношений (74), (75) получим

$$dA = \left(\frac{1}{3G_\omega} - \frac{1}{3G_0} \right) \left(1 + \frac{1-\omega}{\omega} \cos \theta \right) \bar{\sigma} d\bar{\sigma}, \quad (76)$$

где θ – угол,

$$\theta = \arccos \frac{(\hat{\sigma}_D, \sigma_D)}{\|\sigma_D\|}. \quad (77)$$

Заметим, что в силу неравенства Коши–Буняковского–Шварца [6] выражение в правой части равенства (77) не превышает единицы, т.е. угол θ определен корректно.

С учетом соотношения (67) имеем

$$\frac{1}{G_\omega} - \frac{1}{G_0} = \omega \left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_0} \right), \quad (78)$$

и, следовательно, выражение (76) примет вид

$$dA = \left(\frac{1}{3G_t} - \frac{1}{3G_0} \right) (\omega + (1 - \omega) \cos \theta) \bar{\sigma} d\bar{\sigma}. \quad (79)$$

Сделаем несколько замечаний относительно формулы (79). Прежде всего, для большинства реальных материалов диаграмма деформирования обычно направлена выпуклостью вверх и не имеет точек перегиба, поэтому условия $G_0 > G_t > 0$ всегда выполняются. Следовательно, первый множитель в правой части равенства (79) положителен.

Далее при догружении $d\bar{\sigma} > 0$ и условии $\cos \theta \geq 0$ из выражения (79) следует неравенство $dA > 0$. При неравенстве $\cos \theta < 0$ на основании (79) приходим к тому, что условие $dA > 0$ будет выполняться только в случае, если значения весового множителя ω не противоречат следующему неравенству:

$$\frac{1 - \omega}{\omega} |\cos \theta| \leq 1.$$

Простейший анализ позволяет сделать такой вывод. Модуль косинуса угла не превышает единицы, следовательно, получим условие, ограничивающее снизу выбор допускаемых значений весового множителя ω :

$$\frac{1 - \omega}{\omega} < 1, \Rightarrow \omega > \frac{1}{2}. \quad (80)$$

Проверим выполнение неравенства, вытекающего из постулата Друкера и заключающегося в том, что за весь цикл дополнительного нагружения и разгрузки добавочные напряжения $d\sigma_D$ выполняют положительную работу при наличии пластических деформаций:

$$(d\sigma_D, d\varepsilon_D^{(p)}) > 0. \quad (81)$$

Если в формулу (81) подставить выражение (71), то с учетом соотношений (74), (75), (78) получим

$$(d\sigma_D, d\varepsilon_D^{(p)}) = \frac{1}{3} (\bar{d\sigma})^2 \Lambda(\varphi, \psi),$$

где $\bar{d\sigma}$ – интенсивность приращения девиатора напряжений,

$$\bar{d\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|d\sigma_D\|;$$

$\Lambda(\varphi, \psi)$ – тригонометрическая функция, которую можно представить в виде

$$\Lambda(\varphi, \psi) = \left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_0} \right) \cos \varphi (\omega \cos \varphi + (1 - \omega) \cos \psi) + \left(\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G_0} \right) \sin^2 \varphi; \quad (82)$$

φ, ψ – углы догрузки,

$$\varphi = \arccos \frac{(\sigma_D, d\sigma_D)}{\|\sigma_D\| \|d\sigma_D\|}; \quad \psi = \arccos \frac{(\bar{\sigma}_D, d\sigma_D)}{\|d\sigma_D\|}.$$

Рассмотрим некоторые характерные случаи догружения. Прежде всего, при пропорциональном нагружении имеем $\varphi = \psi = \theta = 0$, и, следовательно, выражение (82) примет вид

$$\Lambda(0, 0) = \frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_0}. \quad (83)$$

Кроме того, при нейтральном догружении получим $\varphi = \pi/2$, в результате чего приходим к равенству

$$\Lambda\left(\frac{\pi}{2}, \psi\right) = \frac{1}{G_s} - \frac{1}{G_0}. \quad (84)$$

Выражения (83), (84) будут положительными при $G_0 > G_s > G_t > 0$, что обычно выполняется, если материал упрочняется монотонно и кривая деформирования не имеет точек перегиба.

Учитываем, что при догружении $d\bar{\sigma} > 0$ из равенства (75) следует оценка $\cos \varphi > 0$, и, значит, при условии $0 \leq \psi \leq \pi/2$ получим $\cos \psi \geq 0$, что позволяет оценить снизу функцию $\Lambda(\varphi, \psi)$ с помощью следующего неравенства:

$$\Lambda(\varphi, \psi) \geq \left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_0} \right) \omega \cos^2 \varphi + \left(\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G_0} \right) \sin^2 \varphi > 0.$$

При произвольном догружении $d\bar{\sigma} > 0$ и условии $\pi/2 < \psi \leq \pi$, но при ограничении на величину угла догрузки φ в виде неравенства $\varphi \leq \pi - \psi$ имеем оценку $|\cos \psi| \leq \cos \varphi$. В этом случае функцию $\Lambda(\varphi, \psi)$ можно оценить снизу так:

$$\Lambda(\varphi, \psi) \geq \left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_0} \right) (2\omega - 1) \cos^2 \varphi + \left(\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G_0} \right) \sin^2 \varphi,$$

откуда следует, что неравенство $\Lambda(\varphi, \psi) > 0$ будет иметь место только в случае если выполняется условие $\omega > 1/2$, ограничивающее снизу значения весового множителя ω .

Для всех прочих вариантов догружения функцию (82) запишем в виде

$$\Lambda(\varphi, \psi) = \left(\frac{1}{G_\omega} - \frac{1}{G_s} \right) \cos^2 \varphi + \left(\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G_0} \right) + \left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_0} \right) (1 - \omega) \cos \varphi \cos \psi,$$

откуда следуют необходимые и достаточные условия для выполнения неравенства (81):

$$G_s > G_\omega > 0; \quad \left(\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_0} \right)^2 (1 - \omega)^2 < 4 \left(\frac{1}{G_\omega} - \frac{1}{G_s} \right) \left(\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G_0} \right). \quad (85)$$

Неравенства (85) приводят к ограничению нижних значений весового множителя ω :

$$\omega > \lambda + (1 - \sqrt{\lambda})^2, \quad \lambda = \frac{\frac{1}{G_s} - \frac{1}{G_0}}{\frac{1}{G_t} - \frac{1}{G_0}} < 1. \quad (86)$$

Таким образом, вытекающие из принципа необратимости и постулата упрочнения Друкера ограничения относятся к оценке нижнего порогового значения $\hat{\omega}$, введенного выше с помощью неравенств (16).

Практические рекомендации выбора параметра ω . Условия (85), (86) сужают диапазон допускаемых значений весового множителя ω и влияют на величину погрешности формулы интегрирования (15). Действительно, не все из рассмотренных выше ω -схем интегрирования уравнений пластического течения (6) приводят к построению устойчивых определяющих соотношений в форме уравнений (28), (29), (32). В частности, явные схемы интегрирования, например метод Эйлера с весовым множителем $\omega = 0$, а также схема интегрирования Кранка–Николсона с $\omega = 1/2$, имеющая второй порядок точности, могут вызывать нарушение постулата упрочнения Друкера и принципа необратимости работы на приращениях пластических деформаций, что, в свою очередь, нарушает корректность определяющих уравнений (28), (29), (32) и приводит к некорректной постановке краевой задачи.

Результаты численных расчетов подтвердили тот факт, что игнорирование условия $\omega > 1/2$ может привести к вырождению краевой задачи, потере устойчивости или нарушению сходимости вычислительных процессов. Для практического применения можно рекомендовать схему интегрирования метода Бубнова–Галеркина с весовым множителем $\omega = 2/3$ и неявную схему метода Петрова–Галеркина с $\omega = 1$. Опыт решения практических задач свидетельствует о том, что схему интегрирования метода Бубнова–Галеркина с $\omega = 2/3$ целесообразно использовать при решении упругопластических задач, для которых характерно умеренное изменение направления деформирования элементов тела при переходе от текущего этапа нагружения к последующему, например при решении задач о нагреве или охлаждении при плавном изменении внешних нагрузок. Неявную схему интегрирования метода Петрова–Галеркина с весовым множителем $\omega = 1$ можно рекомендовать при решении упругопластических задач, в которых используются укрупненные этапы нагружения, причем в процессе нагружения наблюдаются резкие изменения направлений деформирования элементов тела, например при нагрузке с последующей полной или частичной разгрузкой или повторно-переменном нагружении.

Пример. В качестве примера, иллюстрирующего свойства уравнений пластичности (28), (29), (32), рассмотрим задачу о деформации круглой тонкостенной трубы, находящейся под действием осевого растяжения и крутящего момента.

Модуль упругости материала E_0 принимаем равным 10^5 МПа. Полагаем, что материал несжимаем с линейным упрочнением $E_1 = E_0/2$. Предел текучести материала σ_s задаем равным 200 МПа.

Задачу решаем при условии плоского напряженного состояния. Рассмотрим единичный квадрат, к сторонам которого прикладываем осевое растягивающее σ и касательное τ напряжения по заданной программе нагружения.

Рассмотрим два пути ступенчатого нагружения, каждый из которых в пространстве напряжений $\sigma - \tau$ представляет два звена (рис. 2).

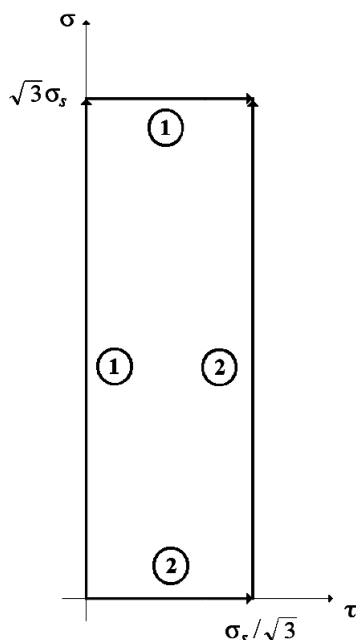


Рис. 2. Два пути (1, 2) ступенчатого нагружения тонкостенной трубы.

Первый путь соответствует программе нагружения растяжение–кручение. Первое звено описывает монотонный рост растягивающего напряжения σ от нуля до величины $\sqrt{3}\sigma_s$, второе – монотонное повышение касательного напряжения τ от нуля до величины $\sigma_s/\sqrt{3}$ при условии, что растягивающее напряжение σ постоянно и равно $\sqrt{3}\sigma_s$.

Второй путь нагружения является альтернативным первому и описывает историю нагружения по программе кручение–растяжение. Первое звено соответствует монотонному росту касательного напряжения τ от нуля до величины $\sigma_s/\sqrt{3}$, второе – монотонному повышению растягивающего напряжения σ от нуля до величины $\sqrt{3}\sigma_s$ при условии, что касательное напряжение τ не изменяется и равно $\sigma_s/\sqrt{3}$.

Точные решения задачи для осевой $\varepsilon^{(p)}$ и сдвиговой $\gamma^{(p)}$ компоненты тензора пластических деформаций в конце каждого пути нагружения определяются на основании следующих формул:

первый путь нагружения

$$\varepsilon^{(p)} = A \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{2} \right), \quad \gamma^{(p)} = A \sqrt{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 \right);$$

второй путь нагружения

$$\varepsilon^{(p)} = A \sqrt{3} \ln 2, \quad \gamma^{(p)} = A \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right),$$

где

$$A = \sigma_s \frac{E_0 - E_1}{E_0 E_1}.$$

Оценим суммарную погрешность δ определения компонент тензора пластических деформаций в конце каждого пути нагружения:

$$\delta = \sqrt{\delta_\varepsilon^2 + \delta_\gamma^2}, \quad \delta_\varepsilon = \frac{|\tilde{\varepsilon}^{(p)} - \varepsilon^{(p)}|}{|\varepsilon^{(p)}|}, \quad \delta_\gamma = \frac{|\tilde{\gamma}^{(p)} - \gamma^{(p)}|}{|\gamma^{(p)}|},$$

где $\tilde{\varepsilon}^{(p)}$ и $\tilde{\gamma}^{(p)}$ – приближенные решения, полученные с использованием ω -схем интегрирования.

Учитывая, что для первого и второго пути нагружения первое звено описывает пропорциональное нагружение, разбиение на дополнительные этапы выполняли только для второго звена.

Результаты решения задачи, полученные при использовании различных значений весового множителя ω и разного количества N этапов нагружения второго звена, представлены в табл. 1–6. Из данных таблиц видно, что при использовании укрупненных этапов нагружения применение к решению модельной задачи схемы интегрирования метода Бубнова–Галеркина с весовым множителем $\omega = 2/3$ приводит к наименьшей суммарной погрешности в определении пластических деформаций. Это обстоятельство является весьма важным аргументом при практическом применении указанной схемы, поскольку решение упругопластической задачи с использованием укрупненных этапов нагружения значительно сокращает вычислительные затраты. С увеличением количества этапов нагружения более точные решения задачи получены при использовании схемы интегрирования Кранка–Николсона с весовым множителем $\omega = 1/2$, имеющей второй порядок точности. Кроме того, согласно полученным результатам при любом количестве этапов нагружения второго звена максимальную погрешность дает неявная схема интегрирования метода Петрова–Галеркина с весовым множителем $\omega = 1$. Отметим также, что уменьшение модуля упрочнения материала E_1 не приводит к существенным изменениям зависимости погрешности решения задачи от параметра ω .

Т а б л и ц а 1

Результаты расчета осевой пластической деформации (%) для первого пути нагружения растяжение–кручение

N	ω , равное				
	0,5	0,6	2/3	0,75	1,0
1	0,196410	0,195692	0,195214	0,194615	0,192820
2	0,196307	0,195877	0,195591	0,195233	0,194160
4	0,196257	0,196033	0,195884	0,195698	0,195139
8	0,196243	0,196130	0,196055	0,195961	0,195679
Точное решение: 0,196238					

Т а б л и ц а 2

Результаты расчета пластической деформации сдвига (%) для первого пути нагружения растяжение–кручение

N	ω , равное				
	0,5	0,6	2/3	0,75	1,0
1	0,023205	0,027846	0,030940	0,034808	0,046410
2	0,029952	0,032153	0,033620	0,035454	0,040995
4	0,031674	0,032760	0,033485	0,034391	0,037108
8	0,032106	0,032648	0,033009	0,033461	0,034815
Точное решение: 0,0322509					

Т а б л и ц а 3

Суммарная погрешность (%) определения пластических деформаций для первого пути нагружения растяжение–кручение

N	ω , равное				
	0,5	0,6	2/3	0,75	1,0
1	28,05	13,66	4,09	7,97	43,83
2	7,13	0,35	4,25	9,94	27,13
4	1,79	1,58	3,83	6,64	15,07
8	0,45	1,23	2,35	3,75	7,95

Заключение. Предложена методология построения семейства двухслойных ω -схем интегрирования уравнений теории пластического течения, описывающих неизотермические процессы нагружения по криволинейным траекториям деформирования малой кривизны. Основные положения феноменологической модели базируются на уравнениях пластического течения Прандля–Рейсса и условии текучести Губера–Мизеса. Задача об интегрировании уравнений пластического течения сформулирована как задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, причем в качестве аргумента, характеризующего процесс нагружения, принята длина траектории деформирования в пространстве пластических деформаций. Рассмотрена общая схема

Т а б л и ц а 4

Результаты расчета осевой пластической деформации (%) для второго пути нагружения кручение–растяжение

N	ω , равное				
	0,5	0,6	2/3	0,75	1,0
1	0,086603	0,103923	0,115470	0,129904	0,173205
2	0,124106	0,131196	0,135923	0,141831	0,159556
4	0,133700	0,137016	0,139226	0,141989	0,150279
8	0,136147	0,137780	0,138868	0,140228	0,144308
Точное решение: 0,136971					

Т а б л и ц а 5

Результаты расчета пластической деформации сдвига (%) для второго пути нагружения кручение–растяжение

N	ω , равное				
	0,5	0,6	2/3	0,75	1,0
1	0,259808	0,242487	0,230940	0,216506	0,173205
2	0,245495	0,236762	0,230940	0,223663	0,201830
4	0,241597	0,237061	0,234037	0,230257	0,218916
8	0,240492	0,238197	0,236668	0,234756	0,229020
Точное решение: 0,2401132					

Т а б л и ц а 6

Суммарная погрешность (%) определения пластических деформаций для второго пути нагружения кручение–растяжение

N	ω , равное				
	0,5	0,6	2/3	0,75	1,0
1	37,67	24,14	16,16	11,10	38,42
2	9,65	4,43	3,89	7,71	22,93
4	2,47	1,27	3,01	5,50	13,13
8	0,62	1,00	1,99	3,26	38,42

преобразований для построения приближенных решений задачи Коши на основе семейства двухслойных ω -схем интегрирования уравнений пластического течения. Отмечается, что дифференциальные уравнения пластического течения относятся к уравнениям так называемой сингулярной пластичности, т.е. теории с особой точкой на поверхности нагружения. Исследованы условия, при которых уравнения пластичности, построенные с использованием двухслойных ω -схем интегрирования, согласуются с принципом необратимости работы на приращениях пластических деформаций и постулатом упрочнения Друкера. В качестве примера, иллюстрирующего свойства рассматриваемых уравнений пластичности, решена задача о деформации круглой тонко-

стенной трубы, находящейся под воздействием осевого растяжения и крутящего момента. Представлены результаты решения модельной задачи, полученные с использованием различных двухслойных ω -схем интегрирования уравнений пластического течения, и даны рекомендации относительно выбора весового множителя ω .

Автор выражает благодарность д-ру техн. наук К. Н. Рудакову за обсуждение работы и канд. техн. наук В. А. Ромащенко за предоставленные аналитические результаты решения тестовой задачи.

Резюме

Розглянуто методологію побудови сімейства двошарових ω -схем інтегрування рівнянь теорії пластичної течії, що описують неізотермічні процеси навантаження за криволінійними траєкторіями деформування малої кривизни. У цьому випадку напружено-деформований стан залежить від історії термосилового навантаження, і процес непружного деформування повинен відслідковуватись на всьому досліджуваному інтервалі часу при покроковому розв'язанні крайової задачі. Основні положення феноменологічної моделі базуються на рівняннях пластичної течії Прандля–Рейсса і умові текучості Губера–Мізеса. Процес навантаження розбивається на окремі розрахункові етапи в часі. Для кожного з них рівняння пластичної течії інтегруються за етап навантаження. Запропоновано загальну схему перетворень для побудови сімейства двошарових ω -схем інтегрування рівнянь пластичної течії. Сформульовано умови, за яких ці рівняння пластичності узгоджуються з принципом необоротності роботи на приростах пластичних деформацій і постулатом зміцнення Друкера. Для ілюстрації властивостей розглянутих рівнянь пластичності розв'язано задачу про деформацію круглої тонкостінної труби, що знаходиться під дією осевого розтягу і крутного моменту. Представлено результати розв'язку модельної задачі, що одержані з використанням різних двошарових схем інтегрування. Запропоновано практичні рекомендації стосовно вибору параметра ω .

1. Шевченко Ю. Н., Савченко В. Г. Термовязкопластичность. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.
2. Шевченко Ю. Н., Бабешко М. Е., Терехов Р. Г. Термовязкопластические процессы сложного деформирования элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 328 с.
3. Махненко В. И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных деформаций и напряжений. – Киев: Наук. думка, 1976. – 320 с.
4. V. I. Makhnenko, E. A. Velikoivanenko, V. E. Pochinok, et al. Numerical Methods for the Predictions of Welding Stresses and Distortions, Welding and Surfacing Reviews Ser., Vol. 13, Pt. 1, Taylor & Francis (1999).
5. Ильюшин А. А. Пластичность: Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.
6. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989. – 736 с.

7. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969. – 420 с.
8. Чирков А. Ю. Анализ краевых задач, описывающих неізотермические процессы упругопластического деформирования с учетом истории нагружения // Пробл. прочности. – 2006. – № 1. – С. 69 – 99.
9. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 600 с.
10. Биргер И. А., Демьянушко И. В. Теория пластичности при неізотермическом нагружении // Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 70 – 77.
11. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
12. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.

Поступила 26. 04. 2011