

Численно-аналитический метод исследования трехмерной динамики многослойных спирально ортотропных цилиндров

В. А. Ромащенко, О. С. Бейнер, Ю. Н. Бабич

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

На основе комбинации разложений переменных в ряды Фурье по угловой координате и двухмерного алгоритма Уилкинса разработан численно-аналитический метод исследования трехмерной неосесимметричной динамики многослойных толстостенных упругих спирально ортотропных цилиндров конечной длины. Проведено тестирование предложенного метода, основанное на сравнении результатов с полученными путем использования вычислительного ядра LS-DYNA учебной версии ANSYS ED. Численно исследованы некоторые особенности динамического поведения двухслойного спирально армированного цилиндра при внутреннем импульсном нагружении сосредоточенным зарядом взрывчатого вещества, смещенным относительно центра симметрии оболочки.

Ключевые слова: спиральная ортотропия, трехмерная динамика, многослойный толстостенный цилиндр, ряды Фурье, алгоритм Уилкинса, неосесимметричная нагрузка.

Введение. Композитные материалы (КМ) находят все более широкое применение в технике, в частности в конструкциях, подверженных нестационарным нагрузкам. К таким конструкциям в первую очередь относятся сосуды, корпуса или защитные сооружения, предназначенные для удержания в своей полости значительных гидро- либо газодинамических нагрузок [1, 2]. Структура и технология создания КМ предопределяют их качественные различия в реакции на динамическую нагрузку. В приложениях используются многослойные оболочки вращения, изготовленные из композитных слоев, армированных по спирали под определенным углом α к образующей. Такие оболочки, как правило, локально ортотропны. Однако их главные оси анизотропии x' , φ' , r не совпадают с осями глобальной цилиндрической системы координат x , φ , r , а повернуты относительно оси r на угол армирования. Во многих работах [1–4] отмечается, что при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) необходимо учитывать эффекты, обусловленные несовпадением главных направлений упругости с направлением координатных линий.

Большинство исследований подобных конструкций проводилось при осесимметричном нагружении [3, 4]. В случае неосесимметричной нестационарной нагрузки, конечной длины цилиндрического конструктивного элемента, локальности нагружения задача исследования становится четырехмерной, зависящей от трех пространственных координат x , φ , r и времени t . Для численного интегрирования таких краевых задач, как правило, используют современные коммерческие пакеты типа LS-DYNA, базирующиеся на трехмерном (3D) динамическом методе конечных элементов (МКЭ).

Однако в случае тел вращения и упругих деформаций, когда задача линейна и зависимость НДС от угла φ обусловлена только неосесиммет-

ричностью нагружения, можно обойтись и без привлечения 3D-элементов. Как показывает опыт [5], в таких случаях хорошо зарекомендовал себя численно-аналитический метод, основанный на разложении переменных в ряды Фурье по φ , в результате чего исходная нестационарная трехмерная краевая задача сводится к набору двумерных. Для многослойных изотропных и цилиндрически ортотропных цилиндров этот метод успешно применялся ранее [5].

Цель данной работы – модифицировать указанный метод на случай неосесимметричного динамического нагружения толстостенных многослойных спирально ортотропных цилиндров, провести тестирование и показать его работоспособность путем проведения модельного расчета.

Математическая постановка краевой задачи. Сформулируем математически задачу исследования (начало координат условимся всегда располагать в центре симметрии цилиндра). Уравнения движения в цилиндрических координатах с учетом произвольного (от -90 до $+90^\circ$) угла спирального армирования α , который полагается постоянным в пределах рассматриваемого слоя, имеют вид [5]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = \rho \frac{du_r}{dt}; \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\tau_{rx}}{r} = \rho \frac{du_x}{dt}; \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_\varphi}{r \partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} = \rho \frac{du_\varphi}{dt}, \end{cases} \quad (1)$$

где ρ – плотность материала слоя; $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_x, \tau_{rx}, \tau_{r\varphi}, \tau_{x\varphi}$ – компоненты тензора напряжений; t – время; u_r, u_φ, u_x – компоненты вектора скорости перемещений.

Геометрические соотношения, выражающие тензор скоростей деформаций через вектор скорости перемещений, запишем следующим образом [5]:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}; & \dot{\gamma}_{r\varphi} = \frac{\partial u_r}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}; \\ \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{r \partial \varphi}; & \dot{\gamma}_{rx} = \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}; \\ \dot{\epsilon}_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \dot{\gamma}_{x\varphi} = \frac{\partial u_x}{r \partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial x}. \end{cases} \quad (2)$$

Физические уравнения теории упругости с учетом произвольного угла спирального армирования слоя α представим в векторной форме:

$$\frac{d}{dt} \{ \sigma_x; \sigma_\varphi; \sigma_r; \tau_{x\varphi}; \tau_{\varphi r}; \tau_{rx} \} = C \{ \dot{\epsilon}_x; \dot{\epsilon}_\varphi; \dot{\epsilon}_r; \dot{\gamma}_{x\varphi}; \dot{\gamma}_{\varphi r}; \dot{\gamma}_{rx} \}, \quad (3)$$

где квадратная матрица C размерности 6×6 симметрична ($C_{ij} = C_{ji}$) и имеет следующие ненулевые компоненты [6]:

$$\begin{aligned}
 C_{12} &= B_{x\varphi} + (A_x + A_\varphi - 2B_{x\varphi} - 4G_{x\varphi}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; \\
 C_{44} &= G_{x\varphi} \cos^2 2\alpha + (A_x + A_\varphi - 2B_{x\varphi}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha; \quad C_{33} = A_r; \\
 \{C_{11}; C_{22}\} &= \{A_x; A_\varphi\} \cos^4 \alpha + \{A_\varphi; A_x\} \sin^4 \alpha + \{1; 1\} \{0, 5B_{x\varphi} + G_{x\varphi}\} \sin^2 2\alpha; \\
 \{C_{13}; C_{23}; C_{55}; C_{66}\} &= \\
 &= \{B_{rx}; B_{\varphi r}; G_{\varphi r}; G_{rx}\} \cos^2 \alpha + \{B_{\varphi r}; B_{rx}; G_{rx}; G_{\varphi r}\} \sin^2 \alpha; \\
 \{C_{34}; C_{56}\} &= \{B_{\varphi r} - B_{rx}; G_{\varphi r} - G_{rx}\} \sin \alpha \cos \alpha; \\
 \{C_{14}; C_{24}\} &= [\{A_\varphi; -A_x\} \sin^2 \alpha + \{-A_x; A_\varphi\} \cos^2 \alpha + \\
 &+ \{1; -1\} \{B_{x\varphi} + 2G_{x\varphi}\} \cos 2\alpha] \sin \alpha \cos \alpha,
 \end{aligned}$$

где

$$A_x = \frac{E_x(1 - \nu_{\varphi r} \nu_{r\varphi})}{D_0}; \quad B_{x\varphi} = \frac{E_\varphi(\nu_{x\varphi} + \nu_{xr} \nu_{r\varphi})}{D_0};$$

$$D_0 = 1 - 2\nu_{x\varphi} \nu_{\varphi r} \nu_{rx} - \nu_{x\varphi} \nu_{\varphi x} - \nu_{\varphi r} \nu_{r\varphi} - \nu_{rx} \nu_{xr};$$

выражения для $A_\varphi, A_r, B_{\varphi r}, B_{rx}$ получены путем циклической перестановки индексов x, φ, r ; E_i, ν_{ij}, G_{ij} ($i, j = x, \varphi, r; i \neq j$) – технические характеристики упругости ортотропного материала в главных осях анизотропии при угле армирования $\alpha = 0$, т.е. в случае цилиндрически ортотропного тела (E_i – модули упругости; G_{ij} – модули сдвига; ν_{ij} – коэффициенты Пуассона в соответствующих направлениях и плоскостях). При этом выполняются равенства [6]:

$$E_i \nu_{ji} = E_j \nu_{ij}, \quad i \neq j, \tag{4}$$

и для реальных материалов имеем $D_0 > 0$.

Система уравнений (1)–(4) замыкается начальными, граничными и контактными условиями. Начальные условия полагались нулевыми, граничные – силовыми на цилиндрических поверхностях (внутренняя поверхность оболочки подвергалась заданному импульсному давлению $P(x, \varphi, t)$, наружная была свободна от нагрузок) и кинематическими на торцах – оба торца цилиндра неподвижны. Контакт между слоями считался идеальным.

Численно-аналитический метод решения. Искомые функции в уравнениях системы (1)–(4) зависят от трех пространственных переменных и времени. В связи с линейностью постановки задачи имеется возможность уменьшения количества независимых переменных путем разложения в ряд Фурье всех неизвестных и давления по окружной координате:

$$F(x, \varphi, r, t) = \sum_{n=0}^N (F_n^s(x, r, t) \sin n\varphi + F_n^c(x, r, t) \cos n\varphi), \quad (5)$$

где в качестве F будут поочередно использоваться давление, а также все компоненты вектора скорости, тензоров напряжений и скоростей деформаций. Для одних видов нагрузок параметр N будет конечным, для других – бесконечным. Тем не менее практически всегда в случае нагрузок, имеющих физический смысл, можно путем аналитического или численного анализа подобрать такое конечное N , при котором получаемые решения будут удовлетворять требуемой точности.

Подставляя (5) в (1)–(3), получаем $N + 1$ взаимно независимых систем уравнений, где неизвестными являются коэффициенты ряда Фурье, изменяющиеся по двум пространственным переменным x, r и времени. Следует отметить, что в случае изотропии или цилиндрической ортотропии цилиндра эти $N + 1$ систем распались еще отдельно по косинусам и синусам соответственно, так что в результате получалось $2N + 1$ независимых систем с меньшим числом уравнений в каждой. В случае спиральной ортотропии такого не происходит, например, даже если $P(x, \varphi, t)$ раскладывается только по косинусам, искомые неизвестные будут раскладываться как по косинусоидальным, так и по синусоидальным гармоникам. И система, соответствующая n -й гармонике, не будет распадаться на две отдельные системы по соответствующим синусам и косинусам.

Каждая из систем уравнений решается численно относительно коэффициентов разложения с помощью алгоритма Уилкинса [4, 5, 7], линеаризованного для случая малых деформаций, поворотов и перемещений. Отличие линеаризованного алгоритма от традиционного состоит в следующем:

- 1) конечноразностная сетка вмораживается в среду один раз и навсегда и не движется вместе со средой;
- 2) вместо скоростей узлов сетки используются скорости их перемещений;
- 3) никаких поправок на поворот НДС элемента между соседними временными шагами нет;
- 4) вычисление массивов масс ячеек не требуется;
- 5) временной шаг постоянен и вычисляется один раз в начале расчета из условия Куранта;
- 6) для регулярных разностных сеток все пространственные производные можно аппроксимировать не формулой Грина, а с помощью рядов Тейлора (рис. 1);
- 7) в случае регулярных разностных сеток все сингулярные члены для узлов (рис. 1,а) в уравнениях движения (1) аппроксимируются так:

$$\left(\frac{f}{\rho r}\right)_i = \frac{1}{4} \left(\frac{f_1 + f_2}{\rho_{12}(r_i + h_r/2)} + \frac{f_3 + f_4}{\rho_{34}(r_i - h_r/2)} \right),$$

где r_i – радиус i -го узла; ρ_{12} и ρ_{34} – плотности материала в верхних (1, 2) и нижних (3, 4) ячейках соответственно (рис. 1,а).

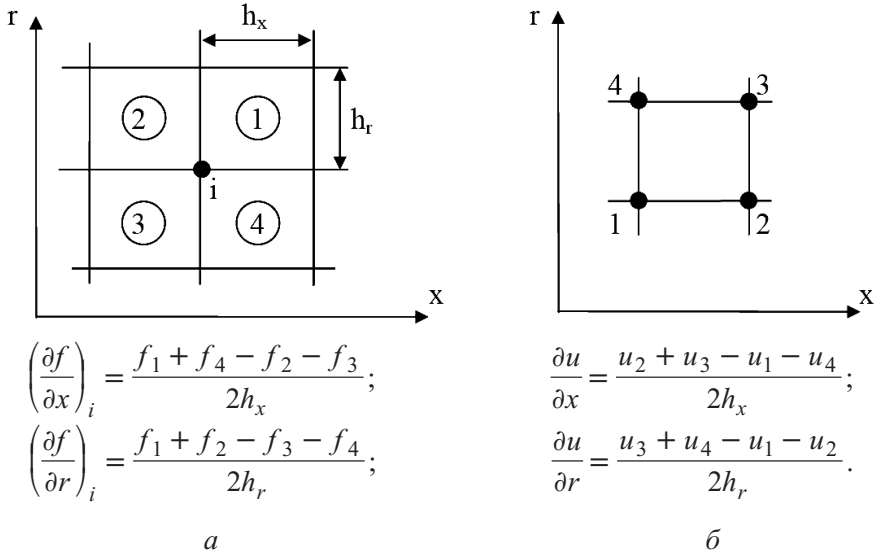


Рис. 1. Конечноразностная аппроксимация пространственных производных для *i*-го узла (*a*) и центра разностной ячейки (*б*).

Сингулярные члены для центра разностной ячейки (рис. 1,б) в геометрических соотношениях (2) аппроксимируются следующим образом:

$$\frac{u}{r} = \frac{1}{4} \left(\frac{u_1 + u_2}{r_{12}} + \frac{u_3 + u_4}{r_{12} + h_r} \right),$$

где r_{12} – радиус 1- или 2-го узла, что одно и то же на рис. 1,б.

Далее используются только регулярные разностные сетки. В случае многослойного цилиндра узлы сетки должны точно попадать на контактную поверхность.

На основе приведенных уравнений разработан пакет прикладных программ (ППП), написанный на языке программирования Delphi, для неосесимметричного трехмерного динамического численного расчета НДС многослойных толстостенных спирально ортотропных упругих цилиндров при произвольном угле армирования каждого слоя.

Тестирование предложенного метода. Подобный ППП для краевых задач с изотропией либо цилиндрической ортотропией слоев тестировался ранее [5]. Ввиду отсутствия в литературных источниках данных о неосесимметричном динамическом нагружении цилиндрических спирально анизотропных конструктивных элементов модифицированный ППП тестировался методом сравнения результатов с полученными с помощью вычислительного ядра LS-DYNA, входящего в бесплатную учебно-тестовую версию многофункционального программного комплекса конечноэлементных расчетов ANSYS ED. Заметим, что в LS-DYNA не используются численно-аналитические методы, основанные на разложениях в ряды Фурье, и все трехмерные задачи решаются динамическим МКЭ на 3D конечноэлементной сетке в декартовых координатах.

В качестве тестовой задачи рассматривается однослойный цилиндр следующих размеров: внутренний радиус $R_1 = 0,1$ м, внешний радиус $R_2 = 0,12$ м, длина $L = 0,4$ м. Цилиндр выполнен из армированного под углом 45° к образующей стеклопластика с такими физико-механическими характеристиками [2]: $E_\varphi = E_r = 14000$ МПа; $E_x = 57000$ МПа; $G_{x\varphi} = G_{rx} = 5750$ МПа; $G_{\varphi r} = 5000$ МПа; $\nu_{x\varphi} = 0,277$; $\nu_{\varphi r} = 0,4$; $\nu_{rx} = 0,068$; $\rho = 1990$ кг/м³; $\alpha = \pi/4$.

Использовали нагрузку

$$P(x, \varphi, t) = P_0(1 + \cos \varphi)H(T_0 - t), \quad (6)$$

где $H(t)$ – функция Хевисайда. В расчетах полагали $P_0 = 10$ МПа, $T_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ с.

Очевидно, что для нагрузки типа (6) необходимо учитывать только нулевую и первую гармоники, поскольку все остальные будут тождественными нулями. Рис. 2, где представлены результаты тестовых расчетов, иллюстрирует изменение во времени безразмерных напряжений. Видно, что данные, полученные численными методами и с помощью разных ППП, хорошо согласуются между собой. Это подтверждает хорошую точность разработанного ППП и численно-аналитического метода. В случае осесимметричных нагрузок, когда в расчет принимается только нулевая гармоника, результаты, полученные с использованием предложенного ППП, тождественно совпадают с таковыми, полученными при использовании ранее разработанного ППП для расчета осесимметричной динамики многослойных спирально ортотропных цилиндров [4].

Модельный расчет. Рассматривается двухслойный цилиндр, имеющий те же размеры, что и однослойный, толщина слоев предполагалась одинаковой – по 0,01 м каждый. Материал внутреннего слоя такой, как и в тестовой задаче, но с другим углом навивки: под углом 30° к образующей. Наружный слой выполнен из стеклопластика с такими характеристиками [2]: $E_\varphi = 10500$ МПа; $E_x = 30900$ МПа; $E_r = 27400$ МПа; $G_{x\varphi} = 3660$ МПа; $G_{\varphi r} = 3690$ МПа; $G_{rx} = 3960$ МПа; $\nu_{x\varphi} = 0,443$; $\nu_{\varphi r} = 0,16$; $\nu_{rx} = 0,11$; $\rho = 1760$ кг/м³; $\alpha = -\pi/3$.

Двухслойная оболочка таким образом была ортогонально армирована: внутренний слой под углом 30° , наружный – под углом -60° к образующей.

Нагружение оболочки проводится смещенным относительно центра ее симметрии сферическим зарядом тротилогексогенового взрывчатого вещества (ВВ), совпадающим с началом координат, и согласно [4, 8] давление на внутренней поверхности цилиндра имеет вид

$$P(x, \varphi, t) = P_0 \frac{H(R_1 a^{-1} \sqrt{1 + \lambda^2 + \eta^2 - 2\lambda \cos \varphi} - t)}{\sqrt{(1 + \lambda^2 + \eta^2 - 2\lambda \cos \varphi)^3}}, \quad (7)$$

где $\lambda = r_0/R_1$; $\eta = (x - x_0)/R_1$; $a = 6310$ м/с; P_0 – номинальное давление на расстоянии R_1 от центра заряда; x_0 и r_0 – осевая и радиальная координаты центра заряда соответственно. Для одного заряда без ограничения общности всегда можно полагать, что он располагается в полуплоскости $\varphi = 0$.

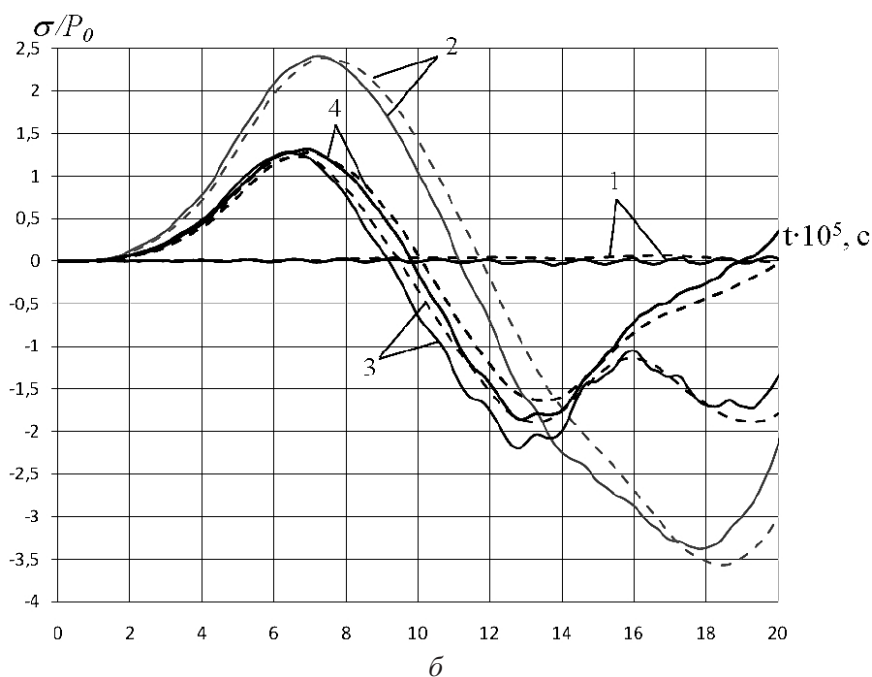
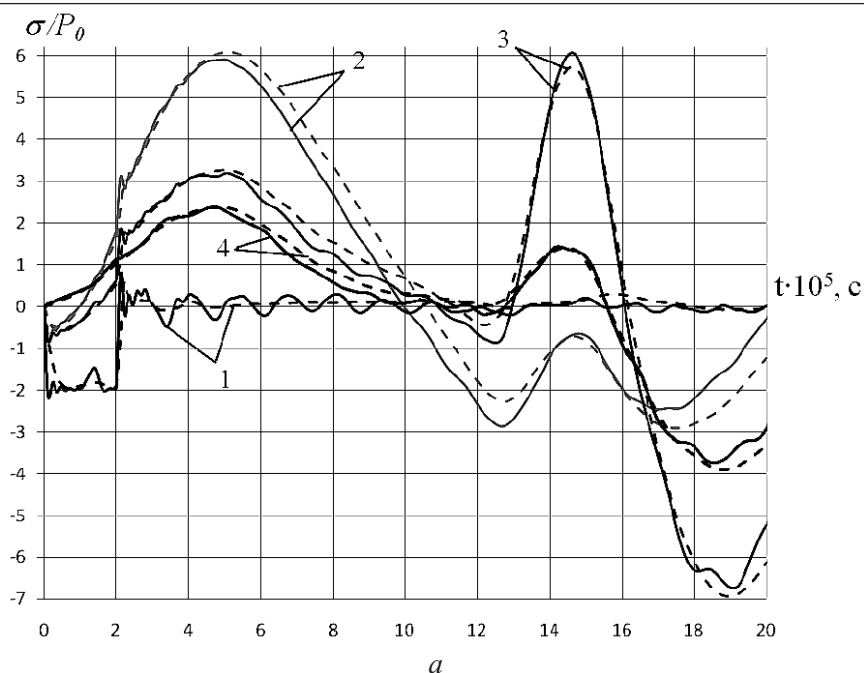


Рис. 2. Тестовые расчеты для разных точек: а – $r = R_1, x = 0, \varphi = 0$; б – $r = R_1, x = 0, \varphi = \pi$ (1 – σ_r/P_0 ; 2 – σ_φ/P_0 ; 3 – σ_x/P_0 ; 4 – $\tau_{x\varphi}/P_0$). (Сплошные линии – по предложенному численно-аналитическому методу, штриховые – с использованием коммерческого пакета LS-DYNA.)

Функция вида (7) имеет бесконечный косинусоидальный ряд Фурье по φ , коэффициенты которого найти точно невозможно, поэтому соответствующие определенные интегралы вычисляются приближенно по формуле прямоугольников. При этом нижние пределы интегрирования благодаря числителю в (7),

начиная с некоторого определенного момента времени, становились переменными. При $\lambda = r_0 = 0$ зависимость P от φ в (7) исчезает, и имеем осесимметричный случай [4].

В расчетах полагали $x_0 = -L/4$, $r_0 = R_1/2$. Оптимальное число гармоник для расчета выбирали исходя из анализа изменения давления во времени в точке $x = x_0$; $\varphi = \pi$ при различных N , так как для этой точки сходимость рядов Фурье функции вида (7) будет наихудшей [9]. Рис. 3 иллюстрирует изменение давления во времени в этой точке при разных N . Видно, что с достаточной для инженерных расчетов точностью можно ограничиться числом гармоник $N = 10$. Функция (7) имеет ступенчатые разрывы, движущиеся в пространстве со скоростью a . Поэтому при неограниченном увеличении числа гармоник в соответствующих местах всегда будут возникать паразитические эффекты Гиббса [9], и избежать малых осцилляций расчетных кривых вокруг точной теоретической линии, видимо, при нагрузке типа (7) не удастся никогда. Заметим, что нагрузка (7) в рассматриваемом примере существенно неосесимметрична: например, в сечении, где располагается заряд ВВ ($\eta = 0$), импульсное давление на внутреннюю поверхность двухслойной оболочки изменяется в зависимости от угла φ в 27 раз по амплитуде и в три раза по длительности.

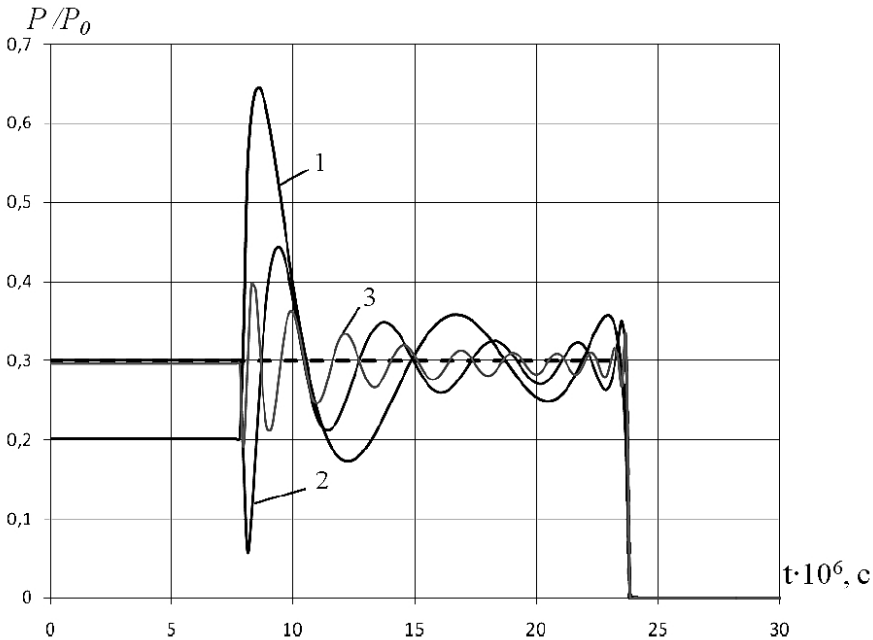
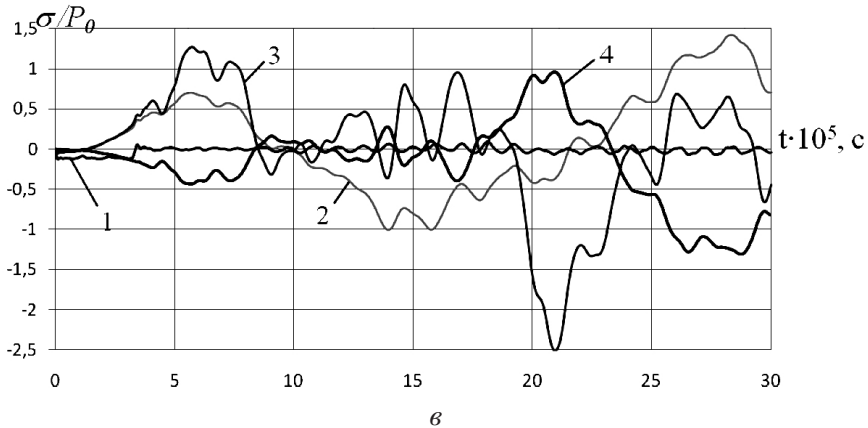
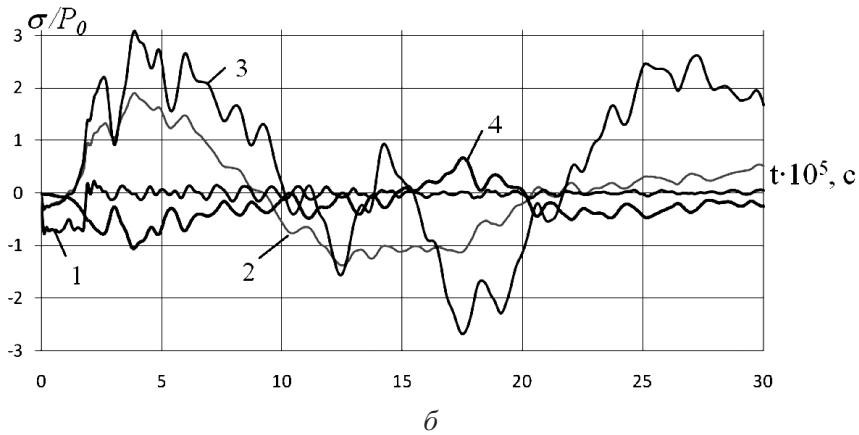
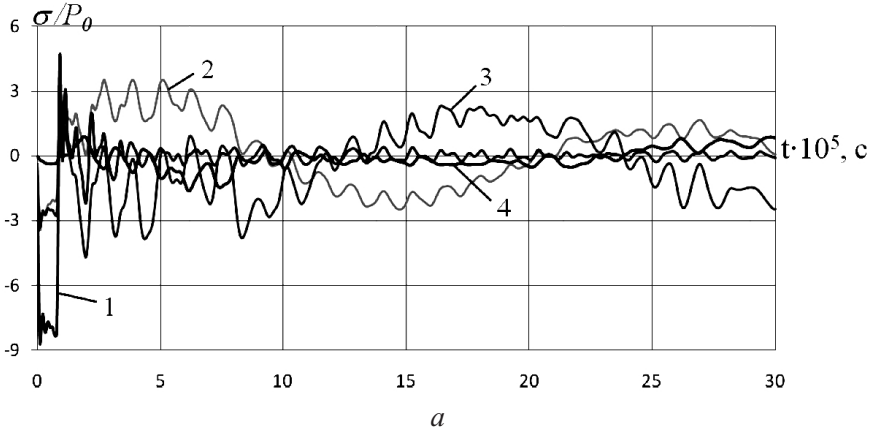


Рис. 3. Определение оптимального количества гармоник для расчета: 1 – $N = 5$; 2 – $N = 10$; 3 – $N = 20$. (Штриховая линия – точное значение.)

Результаты расчетов безразмерных напряжений, отнесенных к P_0 , в различных точках двухслойного цилиндра при $N = 10$ представлены на рис. 4. Видно, что максимальные σ_φ в двухслойном цилиндре реализуются в зонах, наиболее близких к месту расположения заряда ВВ, максимальные σ_x – в центральном сечении $x = 0$, максимальные $\tau_{x\varphi}$ – в сечении, симметричном плоскости расположения заряда относительно центра симметрии оболочки.

При этом напряжения σ_x и σ_φ могут иметь локальные всплески, обусловленные волновыми процессами вдоль оси и окружной координаты и их взаимным наложением. В меньшей степени это справедливо для касательных напряжений. Явно выраженных эффектов типа “раскачки” [4, 10] не наблюдается, поскольку оболочка, во-первых, неподвижно закреплена по торцам и, во-вторых, импульсное нагружение (7) в рассматриваемом случае существенно неосесимметрично и, кроме того, значительно сдвинуто вдоль продольной оси цилиндра относительно его центра симметрии.



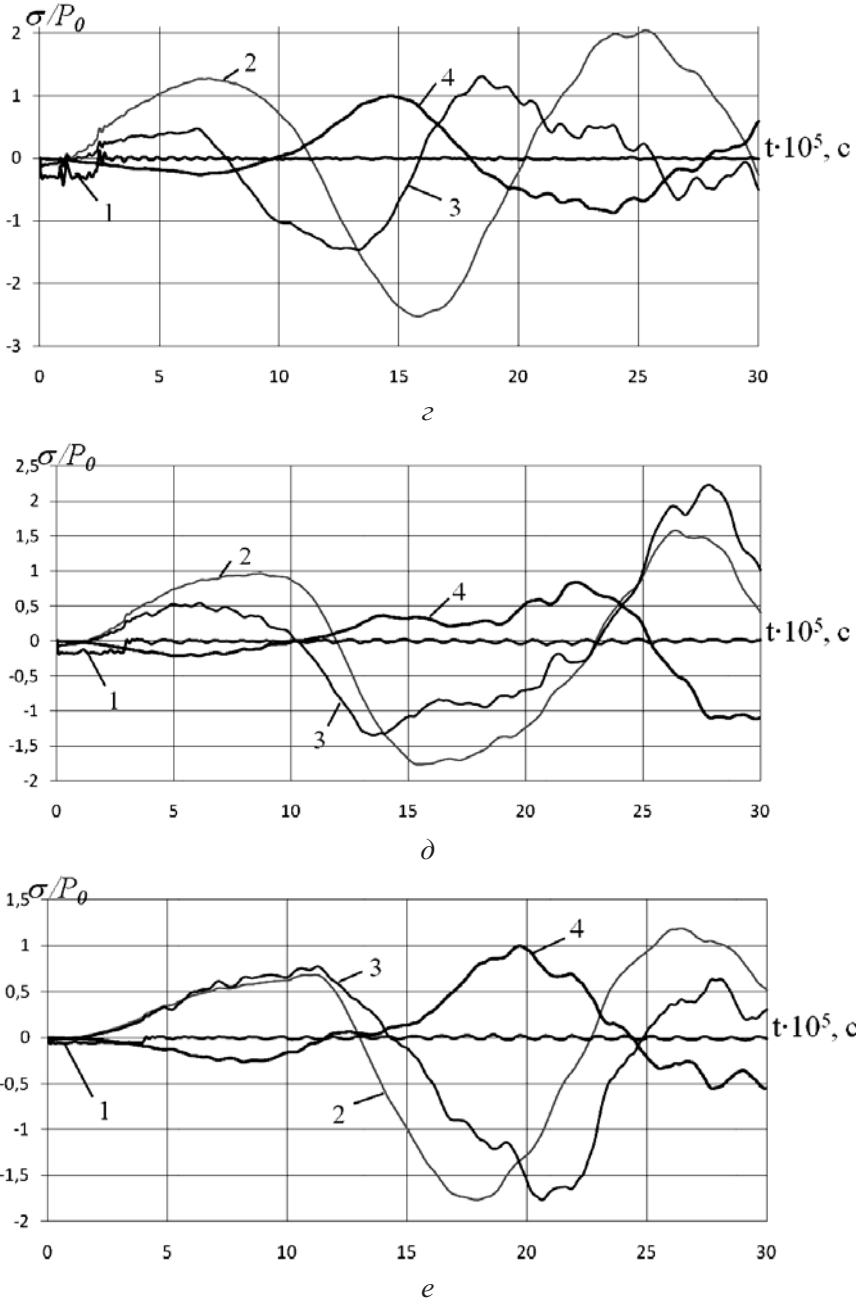


Рис. 4. Изменение напряжений во времени для различных точек двухслойного цилиндра: $a - r = R_1, x = -L/4, \varphi = 0$; $б - r = R_1, x = 0, \varphi = 0$; $в - r = R_1, x = L/4, \varphi = 0$; $г - r = R_1, x = -L/4, \varphi = \pi$; $д - r = R_1, x = 0, \varphi = \pi$; $е - r = R_1, x = L/4, \varphi = \pi$. (Остальные обозначения те же, что и на рис. 2.)

Выводы

1. Разработаны численно-аналитический метод и ППП для расчета нестационарного трехмерного неосесимметричного НДС многослойных толстостенных упругих цилиндрических оболочек со спиральной ортотропией слоев.

2. Предложенный метод отгестирован и на примере конкретной краевой задачи показаны его работоспособность и возможности.

Резюме

На основі комбінації розкладання змінних у ряди Фур'є вздовж кутової координати та двовимірного алгоритму Уілкінса розроблено числовий аналітичний метод дослідження тривимірної неосесиметричної динаміки багатопарових товстостінних пружних спіральних ортотропних циліндрів скінченної довжини. Проведено тестування запропонованого методу на основі порівняння результатів з отриманими шляхом використання обчислювального ядра LS-DYNA учбової версії ANSYS ED. Чисельно досліджено деякі особливості динамічної поведінки двошарового спірального армованого циліндра під дією внутрішнього імпульсного навантаження зосередженим зарядом вибухової речовини, зсунутим відносно центра симетрії оболонки.

1. Федоренко А. Г., Сырунин М. А., Иванов А. Г. Динамическая прочность оболочек из ориентированных волокнистых композитов при взрывном нагружении (обзор) // Прикл. механика и техн. физика. – 1993. – № 1. – С. 126 – 133.
2. Ашкенази Е. К., Ганов Э. В. Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
3. Механика композитов: В 12 т. – Т. 9. Динамика элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1999. – 400 с.
4. Ромащенко В. А. Численное исследование нелинейной динамики многослойных спирально ортотропных цилиндров // Пробл. прочности. – 2008. – № 6. – С. 110 – 121.
5. Галиев Ш. У., Бабич Ю. Н., Жураховский С. В. и др. Численное моделирование волновых процессов в ограниченных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 200 с.
6. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
7. Уилкинс М. Л. Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 212 – 263.
8. Баум Ф. А., Орленко Л. П., Станюкович К. П. и др. Физика взрыва. 2-е изд. – М.: Наука, 1975. – 704 с.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1969. – Т. 3. – 656 с.
10. Луговой П. З. Динамика тонкостенных конструкций при нестационарных нагрузках // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 5. – С. 44 – 73.

Поступила 23. 12. 2009