

## Развитие теорий прочности в механике материалов

А. А. Лебедев

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Приведен краткий анализ истории развития механических теорий прочности материалов, их преимуществ и недостатков. Получен физически достоверный и экспериментально обоснованный критерий эквивалентности квазиоднородных материалов. Структура критерия определена по результатам анализа уравнения предельной поверхности, форма которой удовлетворяет необходимые и достаточные требования, вытекающие из основных законов и постулатов механики деформированного твердого тела. Уравнение включает инварианты, контролирующие разрушение путем сдвига и отрыва. Степени ответственности каждого из этих актов ставится в соответствие параметр пластичности материала, фигурирующий в уравнении в виде весового коэффициента, определяемого по результатам испытания на растяжение и сжатие. Получено условие предельного состояния материалов с неоднородной структурой путем введения в критерий функции влияния, учитывающей статистические аспекты прочности материалов в связи с наличием в них "слабых мест" (повреждений). Определение структуры функции влияния сведено к решению задачи теории вероятности о повторной выборке заданного объема.*

**Ключевые слова:** материал, механические теории прочности, напряженное состояние, предельные поверхности, критерии прочности, неоднородные материалы, статистические аспекты прочности.

Процесс эксплуатации конструкции при температурно-силовых воздействиях сопровождается сложными изменениями структуры и свойств материала с образованием рассеянных и локальных повреждений. Когда плотность накопившихся повреждений достигнет критической величины, состояние материала становится предельным, происходит потеря несущей способности изделия.

Предупредить такой исход или его спрогнозировать можно на стадии проектирования, используя классические подходы механики сплошной среды, механики разрушения, или на основании данных контроля текущего состояния металла неразрушающими методами во время эксплуатации с последующей обработкой результатов измерений по соответствующим моделям кинетической теории накопления повреждений.

Каждый из этих алгоритмов предполагает выполнение операции, связанной с определением эквивалентных напряжений, которые интегрально характеризуют интенсивность внутренних усилий в материале рассматриваемого объекта. Здесь основная сложность состоит в выборе достоверного критерия эквивалентности в связи с огромным разнообразием предложенных критериев и отсутствием четких рекомендаций по их использованию.

Еще в 60-х годах прошлого столетия академик АН Украины Г. С. Писаренко создал в Институте проблем прочности АН Украины специальное подразделение, которому поручил проводить исследования по этой актуальной проблеме, принимал самое активное участие в организации исследований и обсуждении результатов.

Выполненный по заданию Г. С. Писаренко обзор отечественной и зарубежной литературы по развитию механических теорий прочности показал, что большая часть исследований и полученные результаты ограничены формулировкой условий эквивалентности без необходимого физического и экспериментального обоснования, хотя попытки организации целенаправленных опытов предпринимались еще на рубеже прошлого столетия.

В настоящее время известно более 200 различных критериев [1, 2]. Провести их классификацию и сопоставление очень сложно. Эти операции значительно упрощаются, если использовать предложенную Вестергардом (1920 г.) концепцию предельной поверхности

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \quad (1)$$

позволяющую более легко провести анализ предсказуемых с использованием разных критериев закономерностей влияния вида напряженного состояния на сопротивление материала, установить принципиальные различия между исходными предпосылками отдельных критериев и особенности структур соответствующих условий эквивалентности. Впервые эту концепцию использовали в своих работах Бужинский (1928 г.) и Ягн (1930 г.).

Результаты такого анализа в сочетании с известными экспериментальными данными позволяют сформулировать основные, физически непротиворечивые, требования, которым должна удовлетворять предельная поверхность, что, как будет показано ниже, открывает новые пути дальнейшего развития механических теорий прочности.

Предельная поверхность изотропных материалов должна представлять равнонаклоненную к осям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  пространственную фигуру, симметричную к направлениям главных напряжений. На основании того, что геометрия поверхности не зависит от используемой системы координат, принято считать, что компоненты тензора напряжений могут входить в уравнения поверхности только в виде функций, симметричных относительно индексов 1, 2, 3. Из этого ограничения, которое равносильно требованию симметричности предельной поверхности по отношению к пространственной диагонали, следует, что предельная поверхность должна быть не только равнонаклоненной к главным осям, но и являться поверхностью вращения. Этому требованию удовлетворяют регулярные поверхности второго порядка, интерпретирующие в пространстве напряжений различные варианты конкретизации теории Надаи [3]:

$$F(\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}, m_i) = 0, \quad (2)$$

где  $\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}$  – касательные и нормальные октаэдрические напряжения,  $\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ ;  $\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$ ;  $m_i$  – характеристики свойств материала, определяемые по результатам базовых опытов.

Наиболее простым частным случаем уравнения (2) является условие Мизеса–Генки (1913–1914 гг.)

$$F(\tau_{\text{окт}}, m_i) = 0, \quad (3)$$

хорошо описывающее предельное состояние поликристаллических пластичных материалов.

К отдельной группе относятся теории прочности, интерпретирующиеся сингулярными поверхностями (имеющие ребра и грани), в том числе теория максимальных нормальных напряжений с сингулярной поверхностью в виде куба с центром, смещенным по диагонали пространства в сторону всестороннего сжатия:

$$F(\sigma_{\text{max}}, m) = 0. \quad (4)$$

Идея теории (4), впервые высказанная Леонардо да Винчи [3], нашла признание и экспериментальное подтверждение на очень хрупких, но сравнительно однородных материалах. К этой же группе относится теория максимальных касательных напряжений, впервые предложенная Кулоном (1773 г.):

$$F(\tau_{\text{max}}, m) = 0, \quad (5)$$

интерпретация которой в пространстве имеет вид правильной шестигранной призмы, вписанной в цилиндр Мизеса. Теория (5) хорошо описывает процессы деформирования и разрушения материалов, склонных к локализации пластических деформаций.

Известны попытки вывести расчетные уравнения Кулона и Мизеса исходя из одного энергетического начала или обобщить, например, в форме [4]:

$$\left[ \frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^n + (\sigma_2 - \sigma_3)^n + (\sigma_1 - \sigma_3)^n}{2} \right]^{1/2} = (\sigma_p)^n.$$

При  $n=1$  условие сводится к критерию Кулона, при  $n=2$  – к критерию Мизеса. Промежуточным значениям соответствуют предельные поверхности, расположенные между призмой Кулона и цилиндром Мизеса.

Дальнейшие исследования по теории предельных состояний были направлены на разработку более надежных критериев прочности квазихрупких материалов.

Чтобы выявить инварианты напряжений, определяющие форму поверхности, воспользуемся цилиндрической системой координат, ось  $x$  которой совпадает с диагональю пространства (рис. 1). Координаты  $x$ ,  $r$  и  $\varphi$  этой системы имеют четкий механический смысл. Действительно, напряженное состояние в любой точке  $M(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  пространства можно оценить тензором напряжений  $T_\sigma$  или в виде суммы шарового тензора  $\sigma_0$  (отрезок  $00'$ ) и девиатора  $D_\sigma$  (радиус-вектор  $r$  – длина перпендикуляра  $M0'$ , опущенного из точки  $M$  на диагональ  $0x$  пространства напряжений).

Длины отрезков  $00'$  и  $M0'$  пропорциональны соответственно октаэдрическому нормальному и касательному напряжениям:

$$00' = K'_1 \sigma_{\text{окт}}, \quad M0' = K'_2 \tau_{\text{окт}}, \quad (6)$$

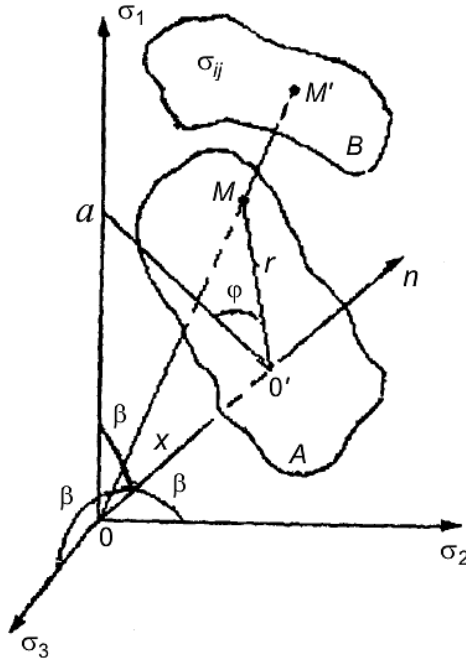


Рис. 1. Инварианты тензора напряжений, определяющие форму предельной поверхности.

а угловая координата угла вида девиатора, как известно, связана с параметром Лоде  $\mu_\sigma$ , т.е. с третьим инвариантом тензора [5]:

$$\varphi = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} \mu_\sigma; \quad \mu_\sigma = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3}. \quad (7)$$

Если точка  $M'$  принадлежит предельной поверхности, ее форма и свойства могут быть определены тремя параметрами напряженного состояния:  $\tau_0$ ,  $\sigma_0$ ,  $\mu_\sigma$ , а уравнение поверхности имеет вид

$$f(\tau_{\text{окт}}, \sigma_{\text{окт}}, \mu_\sigma, m_i) = 0. \quad (8)$$

Заметим, что инварианты уравнения (8) связаны с главными компонентами тензора напряжений соотношениями:

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_{\text{окт}} + \frac{3 - \mu}{\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu^2}} \tau_{\text{окт}}; \\ \sigma_2 = \sigma_{\text{окт}} + \frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{3 + \mu^2}} \tau_{\text{окт}}; \\ \sigma_3 = \sigma_{\text{окт}} - \frac{\sqrt{2}\mu}{\sqrt{3 + \mu^2}} \tau_{\text{окт}}. \end{cases} \quad (9)$$

Включение в уравнение (8) параметра Лоде  $\mu_\sigma$ , учитывающего, как отмечалось выше, влияние третьего инварианта тензора напряжений на предельное состояние материала, эквивалентно предположению о том, что наступление предельного напряженного состояния определяется не только октаэдрическим касательным напряжением, критическое значение которого зависит от шарового тензора, но и ориентацией октаэдрического касательного напряжения по отношению к направлениям главных нормальных напряжений, т.е. зависит от угла  $\varphi$  (рис. 1). На целесообразность учета параметра  $\mu_\sigma$  при разработке критериев прочности обращали внимание многие авторы. Влияние вида девиатора напряжений на сопротивление материалов деформированию подтверждено экспериментально [6–10].

Следовательно, предельная поверхность механического критерия прочности должна представлять собой равнонаклоненную к главным осям пространственную фигуру, имеющую в сечении, перпендикулярном ее оси, не окружность (поверхность вращения), а более сложную замкнутую кривую, инвариантную к направлениям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ .

Уравнение следа предельной поверхности в девиаторной плоскости  $\sigma_{\text{окт}} = \text{const}$  имеет вид

$$F(\tau_{\text{окт}}, \mu_\sigma, m_i) = 0. \quad (10)$$

Для выяснения характера этой кривой осуществим изменение напряженного состояния таким образом, чтобы параметр  $\sigma_{\text{окт}}$  (шаровой тензор) оставался постоянным, т.е. переход от одного напряженного состояния к другому происходит путем изменения компонентов девиатора напряжений (параметра  $\mu_\sigma$ ). При этом будем иметь в виду, что в соответствии с постулатом Друккера [11] предельная поверхность, а следовательно, и ее девиаторное сечение должны быть выпуклыми, причем в общем случае они могут быть как регулярными, так и сингулярными. Опыты показывают, что предельные поверхности в виде многогранников характерны для малоупрочняющихся высокопластичных материалов и монокристаллов. В то же время у подавляющего большинства поликристаллических конструкционных материалов при нагружении происходит интенсивное перераспределение деформаций по элементам структуры, обеспечивающее отсутствие особых точек или областей на предельной поверхности, т.е. ее регулярность.

Для конкретизации формы девиаторного сечения предположим, что пластичный материал, предельное состояние которого описывается условием Мизеса (окружность 1 на рис. 2), претерпевает, например, при понижении температуры охрупчивание, вследствие чего происходит повышение характеристик прочности, причем, как известно, темп роста прочности при сжатии в условиях охлаждения превышает этот темп при растяжении. В результате имеем  $\sigma'_c > \sigma'_p$ , а девиаторное сечение в каждом из трех секторов, ограниченных осями  $\mu_\sigma = +1$ , приобретает вид выпуклых кривых второго порядка или, если исходное состояние материала описывается условием Кулона, – тремя парами пересекающихся в точках  $\sigma'_p$  и  $\sigma'_c$  прямых, образующих неправильный шестигранник (на рис. 2 не показан).

При дальнейшем охлаждении, когда происходит полное охрупчивание материала, девиаторные сечения регулярной или сингулярной поверхности

трансформируются в треугольник (срез вершины куба), соответствующий теории максимальных нормальных напряжений ( $\sigma_{\max} = \text{const}$ ), которая, как отмечалось выше, хорошо описывает предельное состояние очень хрупких материалов.

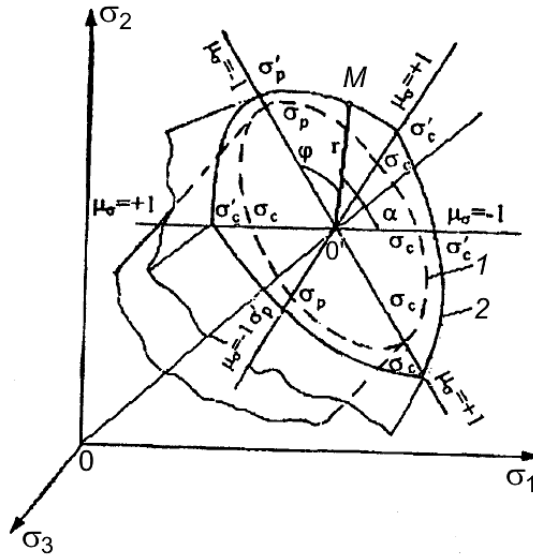


Рис. 2. Девиаторные сечения предельных поверхностей: 1 – цилиндр Мизеса; 2 – сечение по поверхности (17).

Представляет интерес исследование характера изменения девиаторного сечения предельной поверхности с изменением шарового тензора. Можно считать экспериментально доказанным, что для материалов, находящихся в малопластичном состоянии ( $\sigma_c > \sigma_p$ ), размеры нормального сечения предельной поверхности увеличиваются с повышением гидростатического сжатия, сохраняя полное подобие. Установлено также, что для материалов с достаточно однородной структурой предельная поверхность со стороны отрицательного октанта остается открытой.

На рис. 3 для примера приведены результаты испытаний некоторых материалов, в том числе неметаллических, при растяжении ( $\mu_\sigma = -1$ ), кручении ( $\mu_\sigma = 0$ ) и сжатии ( $\mu_\sigma = +1$ ) с наложением гидростатического давления. Видно, что зависимость девиаторной компоненты напряжений от шаровой компоненты при фиксированных значениях  $\mu_\sigma$  интерпретируется линией малой кривизны. Если пренебречь кривизной, которая у большинства материалов пренебрежимо мала, то предельная поверхность может быть представлена конусом с угловым коэффициентом образующих у вершины, зависящим от  $\mu_\sigma$ , т.е. предельная поверхность имеет вид некругового конуса, девиаторные сечения которого, построенные для разных значений шарового тензора, геометрически подобны.

Общим уравнением конических сечений при пересекающихся осях формирующих конусов в полярных координатах будет выражение

$$r(1 - e \cos \varphi) = P. \tag{11}$$

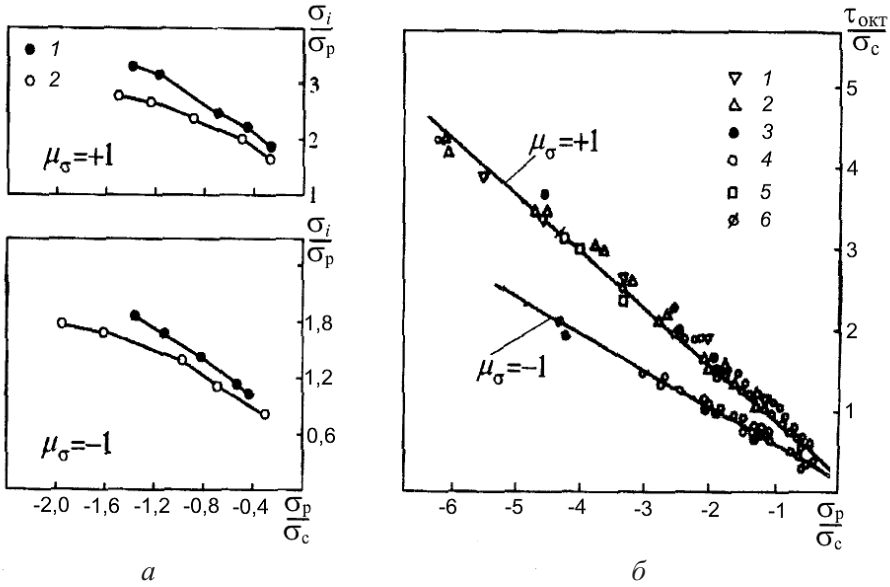


Рис. 3. Результаты испытаний материалов в условиях всестороннего сжатия металлических материалов при кручении (1 – чугун СЧ18; 2 – алюминий АМ5в) – а и различных марок бетона при растяжении и сжатии (1–6) – б.

В рассматриваемом случае радиус-вектор  $r$  (рис. 2) имеет смысл октаэдрического касательного напряжения, а фокальный параметр  $P$ , определяющий размеры сечения, будет линейной функцией шарового тензора. Для конической поверхности имеем

$$P = m_1 + m_2 \sigma_{окт}. \quad (12)$$

На основании (11) и (12) получим

$$\tau_{окт} (1 - e \cos \varphi) = m_1 + m_2 \sigma_{окт}. \quad (13)$$

Угловые коэффициенты  $e$  и  $m_2$  в уравнении (13) являются константами. Соотношение между ними может быть установлено из прямоугольного треугольника  $\theta a \theta'$  (на рис. 1 плоскость  $\varphi = 0$ ), согласно которому

$$a \theta' / \theta \theta' = \operatorname{tg} \beta = \sqrt{2} \quad (\beta = 54^\circ 40'),$$

откуда с учетом (6) получим

$$\tau_{окт} = \sqrt{2} \sigma_{окт}.$$

Следовательно, угловой коэффициент при  $\tau_{окт}$  должен быть в  $\sqrt{2}$  раз больше углового коэффициента при  $\sigma_{окт}$ , т.е. для  $\varphi = 0$ :

$$e = \sqrt{2} m_2. \quad (14)$$

Величину  $\cos \varphi$ , отражающую в уравнении (13) влияние вида девиатора, можно выразить через параметр Надаи:

$$\cos \varphi = \cos(120^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha - \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{3 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} \alpha}{2\sqrt{3 + 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}}$$

или на основании (7) –

$$\cos \varphi = \frac{3 - \mu_\sigma}{2\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}}. \quad (14a)$$

Подставляя это соотношение в уравнение (13) с учетом (14), получаем

$$\tau_{\text{окт}} - m_2 \left( \sigma_{\text{окт}} + \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2}\sqrt{3 + \mu_\sigma^2}} \tau_{\text{окт}} \right) = m_1. \quad (15)$$

Выражение в скобках, как следует из (9), равно максимальному нормальному напряжению  $\sigma_1$ . Поэтому уравнение (15) приводится к виду

$$\tau_{\text{окт}} - m_2 \sigma_1 = m_1 \quad (15a)$$

или, переходя к интенсивности напряжений  $\tau_{\text{окт}} = (\sqrt{2}/\sqrt{3})\sigma_i$ , имеем

$$\sigma_i - m'_2 \sigma_1 = m'_1. \quad (16)$$

Если за базовые опыты принять одноосное растяжение и одноосное сжатие, то на основании (16) для этих видов испытаний получим

$$\sigma_p - m'_2 \sigma_p = m'_1; \quad \sigma_c = m'_1,$$

откуда находим

$$m'_1 = \sigma_c, \quad m'_2 = \sigma_c / \sigma_p = 1,$$

а уравнение (16) преобразуется к виду

$$\chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 = \sigma_p, \quad (17)$$

где  $\chi$  – коэффициент пластичности материала, характеризующий степень ответственности за макроразрушение сдвиговой деформации, создающей благоприятные условия для разрыхления материала и образования трещин,  $\chi = \sigma_p / \sigma_c$ .

Как уже отмечалось, процессы деформирования и разрушения пластичных материалов, склонных к локализации пластических деформаций, хорошо описывает теория максимальных касательных напряжений. Поэтому представляет интерес на основе описанного выше подхода построить условие



прочности с использованием в качестве условия предельного состояния пластичного материала не критерия Мизеса (4), а критерия Кулона (5), т.е. сформулировать указанные условия для квазихрупких материалов, интерпретирующиеся сингулярными поверхностями.

В рассматриваемом случае сдвиговые деформации определяются не октаэдрическими напряжениями, а максимальными касательными:

$$\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2.$$

Поэтому, если в условие (15) вместо  $\tau_{\text{окт}}$  подставить величину  $\tau_{\max}$ , то с учетом того, что выражение в скобках равно  $\sigma_1$ , по аналогии с (15а) получим

$$\tau_{\max} - m_1'' \chi = \sigma_p / \sigma_c = m_2''$$

или

$$(\sigma_1 - \sigma_3) - m_1''' \sigma_1 = m_2'''. \quad (18)$$

Определив параметры  $m_1'''$  и  $m_2'''$  из опытов на растяжение и сжатие

$$m_1''' = \sigma_c; \quad m_2''' = \sigma_c / \sigma_p - 1,$$

уравнение (18) приводится к виду

$$\sigma_1 - \chi \sigma_3 = \sigma_p, \quad (19)$$

где параметр  $\chi = \sigma_p / \sigma_c$  имеет тот же смысл, что и в уравнении (17).

Условие (19) является, как известно, условием Кулона–Мора, которое в пространстве напряжений интерпретируется неправильной шестигранной пирамидой с вершиной, лежащей на диагонали ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \text{const}$ ) пространства  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Легко показать, что эта пирамида вписана в поверхность (17), сформированную тремя коническими поверхностями, которые, пересекаясь, образуют некруговой конус с девиаторным сечением в виде равностороннего криволинейного треугольника (рис. 4).

Поверхности (17) и (19) имеют много общих свойств. Так, при  $\chi \rightarrow 0$  (очень хрупкие материалы) выражения (17) и (19) преобразуются в уравнение теории максимальных нормальных напряжений, а предельные поверхности обеих теорий распадаются на три пары плоскостей, образуя куб с центром, смещенным по диагонали пространства в область всестороннего сжатия.

В случае если  $\chi \rightarrow 1$  (пластичные материалы), условие (17) преобразуется в условие Мизеса, а условие (19) – в условие Кулона. Предельные поверхности трансформируются соответственно в равнонаклоненные к осям  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  круговой цилиндр и вписанную в него правильную шестигранную пирамиду.

Теории (17) и (19) имеют четкий физический смысл. В них отражена впервые высказанная Прандтлем концепция о двух видах разрушения: хрупком (отрывом) и вязком (сдвигом), которая получила широкое развитие в трудах отечественных ученых. На этой концепции, не имеющей противо-

речий с точки зрения формальной логики и современных физических представлений о роли нормальных и касательных напряжений в реализации актов отрыва и сдвига, фактически базируются рассмотренные выше подходы.

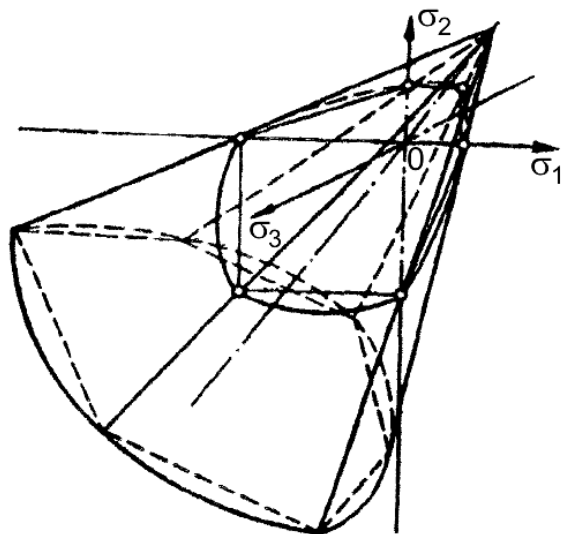


Рис. 4. Предельные поверхности критериев (5) и (17). Показаны сечения этих поверхностей плоскостью  $\sigma_3 = 0$ .

Действительно, фигурирующий в уравнениях (17) и (19) коэффициент  $\chi$  является весовым коэффициентом, отражающим степень ответственности за разрушение материала нормальных и касательных напряжений, контролирующих акты отрыва и сдвига. Широкий диапазон изменений этого коэффициента ( $0 < \chi < 1$ ) позволяет учитывать особенности физико-механических свойств материала и его склонность к разрушениям отрывом или сдвигом.

О степени достоверности критериев (17) и (19) можно судить по результатам специальных опытов, в том числе в условиях высокого гидростатического давления. Здесь следует отметить работу [12], в которой проведен анализ результатов испытаний 28 материалов разной природы и структурного состояния, включая металлы [13].

Тщательная обработка этих данных в девиаторной плоскости свидетельствует, что экспериментальные точки практически всех материалов группируются в основном возле кривой (17), а кривая (19) служит для них своего рода нижней границей. Показательными в отношении достоверности условия (17) есть также результаты [14], полученные при испытаниях материалов разных классов при плоском напряженном состоянии, в том числе в условиях низких и высоких температур. Анализ показывает, что в области двухосного растяжения экспериментальные точки некоторых материалов тяготеют в сторону начала системы координат, а при растяжении–сжатии, наоборот – от центра. Эти тенденции особенно явно просматриваются у материалов с высокой степенью структурной неоднородности, о чем свидетельствует более характерное для них рассеяние соответствующих опытных данных. Обращают на себя внимание также некоторые отклонения от принятой линейной

аппроксимации образующей поверхности. Для отдельных материалов, как это следует из рис. 3, эти отклонения могут быть заметными особенно при очень высоком гидростатическом давлении. В этом случае девиаторное сечение можно формировать участками других кривых, в достаточной степени отражающих результаты экспериментов, но не приводящих к громоздким уравнениям предельных поверхностей.

Так, если предельная поверхность формируется параболоидами вращения с осью, параллельной диагонали пространства напряжений, то сечение предельной поверхности девиаторной плоскостью образовано окружностями (рис. 5). В соответствии с обозначениями на рис. 5 для косоугольного треугольника можно записать

$$r^2 - \alpha r \cos \varphi = R^2 - \alpha^2. \quad (20)$$

Здесь, как и выше,  $r$  имеет смысл октаэдрического касательного напряжения. Для того чтобы в плоскости  $\mu_\sigma = \text{const}$  ( $\cos \varphi = \text{const}$ ) уравнение поверхности, как это требует наложенное выше условие, определяло параболу, достаточно принять

$$R^2 - \alpha^2 = n_1 + n_2 \sigma_{\text{окт}}.$$

Учитывая, что по аналогии с выражением (14)  $\alpha = \sqrt{2} n_2$ , получаем

$$\tau_{\text{макс}}^2 - \sqrt{2} n_2 \cos(\varphi) \tau_{\text{окт}} = n_1 + n_2 \sigma_{\text{окт}},$$

а на основании соотношения (15) –

$$\tau_{\text{окт}}^2 - n_2 \left( \sigma_{\text{окт}} + \frac{3 - \mu_\sigma}{\sqrt{2} \sqrt{3 - \mu_\sigma^2}} \tau_{\text{окт}} \right) = n_1, \quad (21)$$

откуда

$$\tau_{\text{окт}}^2 - n_2 \sigma_1 = n_1$$

или

$$\sigma_i^2 - n'_2 \sigma_1 = n'_1.$$

Выражая коэффициенты  $n'_1$  и  $n'_2$  через предельные напряжения при одноосном растяжении–сжатии

$$n'_1 = \sigma_p^2; \quad n'_2 = (\sigma_p^2 - \sigma_c^2) / \sigma_p^2$$

и подставляя  $\chi = \sigma_p / \sigma_c$ , получаем окончательно:

$$\chi^2 \sigma_i^2 + \sigma_p (1 - \chi^2) \sigma_1 = \sigma_p^2. \quad (22)$$

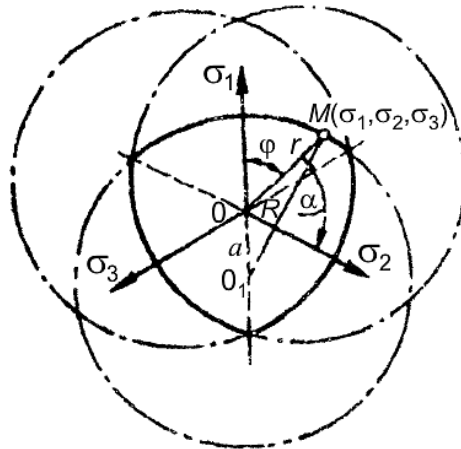


Рис. 5. Девиаторное сечение предельной поверхности, формируемое окружностями.

Если в качестве формирующей поверхности принять эллипсоид, большая ось которого наклонена к пространственной диагонали, то, используя аналогичную методику, получаем уравнение

$$\chi^2 \sigma_i^2 + (1 - \chi^2) \sigma_1^2 = \sigma_p^2. \quad (23)$$

При изменении коэффициента  $\chi$  изменяется и расчетное значение сопротивления материала гидростатическому растяжению, координаты которого в соответствии с уравнениями (19), (22) и (23) составляют

$$\sigma_{p1}^0 = \frac{\sigma_p}{1 - \chi}; \quad \sigma_{p2}^0 = \frac{\sigma_p}{1 - \chi^2}; \quad \sigma_{p3}^0 = \frac{\sigma_p}{\sqrt{1 - \chi^2}},$$

т.е. могут изменяться от  $\sigma_p^0 = \sigma_p$  при  $\chi = 0$  до  $\sigma_p^0 = \infty$  при  $\chi = 1$ .

Легко заметить, что со стороны гидростатического сжатия критерии (19) и (22) не предполагают ограничения прочности материала при любых значениях параметра  $\chi$ , а в соответствии с критерием (23) –

$$\sigma_{c3}^0 = \frac{\sigma_p}{-\sqrt{1 - \chi^2}} = -\sigma_{p3}^0,$$

что противоречит одному из требований к предельным поверхностям, сформулированных выше.

Уравнения (17), (19) и (22), основанные на совмещении условий пластичности ( $\tau_{\text{окт}} = \text{const}$ ) и хрупкого разрушения ( $\sigma_{\text{max}} = \text{const}$ ), являются физически достоверными, а их геометрическая интерпретация подтверждает предположение Койтера [15] о том, что наблюдаемые экспериментально углы на предельных поверхностях возникают в результате пересечения двух и более

гладких поверхностей. В этих уравнениях в определенной мере воплощен сформулированный Н. Н. Давиденковым [16] принцип сходимости решений, полученных на основе физических и феноменологических предпосылок.

Описанные выше новые подходы к решению проблем, связанных с развитием механических теорий прочности, и полученные на их основе результаты расширили возможности и объем их использования при решении конкретных практических задач с учетом как достаточно высокой достоверности искомых решений, так и удобств применения в современных алгоритмах расчета.

Однако разнообразие структур реальных конструкционных материалов, содержащих различного рода дефекты (микро- и макротрещины, поры, волосяны и т.п.), требует разработки новых эффективных способов учета специфики их строения и статистической природы с целью детального совершенствования и расширения сферы использования создаваемых теорий прочности.

Дальнейшее развитие этих подходов может быть проведено путем ввода в механические критерии прочности, описывающие сопротивление “бездефектных” материалов, функций влияния, отражающих статистические аспекты прочности структурно-неоднородных тел, которые в основном проявляются в процессе развития трещин, поэтому связать их целесообразно только с нормальным напряжением  $\sigma_1$  как критерием распространения дефектов.

Если в основу анализа положить критерий (17), то с учетом его структуры можно записать

$$\chi\sigma_i + (1-\chi)\sigma_1 Q = \sigma_p, \quad (24)$$

где  $Q$  – функция влияния, отражающая статистические аспекты деформирования и разрушения материала.

Для определения функции  $Q$  необходимо решить вероятностную задачу о прочности неоднородного тела. Предполагается, что степень ослабления тела в связи с наличием дефектов прямо пропорциональна вероятности накопления в нем критического числа развивающихся трещин при заданном уровне напряжений. Тогда функция  $Q$ , отражающая в критерии (24) влияние слабых мест на предельное состояние деформируемого тела, определится как отношение некоторого допуска на вероятность  $P(n)$  нарушения сплошности возле  $n_c$  слабых мест при произвольном напряженном состоянии к соответствующей вероятности  $P_0(n)$  при основном виде испытаний (например, при одноосном растяжении):

$$Q' = P(n)/P_0(n). \quad (25)$$

Тело, имеющее микродефекты, рассматривается как система, которая является квазиоднородной в пределах основы (матрицы) и существенно неоднородной в пределах всего объема. По мере увеличения прикладываемых к телу внешних усилий в материале одновременно происходят два процесса, контролирующих и определяющих (в основных чертах) кинетику разрушения: деформирование матрицы, приводящее к ее упрочнению и разупрочнению, и накопление повреждений в соответствии с законом распределения вероятностей развития дефектов по их случайным признакам. Оба процесса

взаимосвязаны. Надрывы возле дефектов ослабляют матрицу и приводят к “преждевременному” разрушению тела – полному разрыву матрицы, сопротивление которой при условии отсутствия дефектов еще не было исчерпано.

Существенную роль играет вид напряженного состояния: увеличение положительного шарового тензора способствует раскрытию трещины, при увеличении отрицательного, наоборот, трещина закрывается и служит препятствием развитию магистрали раздела.

Поскольку величина пластических сдвигов зависит от уровня касательных напряжений, критическое число внутренних надрывов в материале, необходимое для полного разрушения тела при заданной схеме приложения внешних сил, должно увеличиваться с ростом интенсивности напряжений  $\sigma_i$  как величины, ответственной за формоизменение материала.

В первом приближении можно принять

$$n_c = \alpha_1 - \alpha_2 J, \tag{26}$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – константы, отражающие свойства материала в связи с наличием в нем слабых мест (дефектов);  $J$  – параметр напряженного состояния, имеющий по аналогии с  $\sigma_{\max}/\tau_{\max}$  смысл жесткости нагружения,

$$J = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/\sigma_i.$$

Вероятность развития  $n_c$  дефектов (например, дефектов с номерами 1, 2, 3, ...) из  $n$  имеющихся по теореме умножения вероятностей для независимых событий запишем в виде

$$P(n) = q^{n_c} (1 - q)^{n - n_c}, \tag{26a}$$

где  $q$  – осредненная вероятность развития каждого дефекта.

На основании (24), (25), а также учитывая, что для одноосного растяжения  $J = 1$ , получаем

$$Q = \left( \frac{1 - q}{q} \right)^{\alpha_2 (1 - J)}$$

или

$$Q = A^{1 - J}. \tag{27}$$

Таким образом, критерий (23) можно записать в виде

$$\chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1 A^{1 - J} = \sigma_p, \tag{28}$$

где константа  $A = \left( \frac{1 - q}{q} \right)^{\alpha_2}$  – параметр структуры, отражающий характер имеющихся в материале дефектов.

Если параметр  $\chi$  найден по результатам испытаний на растяжение и сжатие, а третий опыт проведен при чистом сдвиге, то из уравнения (28) для чистого сдвига ( $J = 0$ ) получим

$$\chi\sqrt{3}\tau_c + (1-\chi)\tau_c A = \sigma_p,$$

откуда

$$A = (\sigma_p - \sqrt{3}\chi\tau_c) / [(1-\chi)\tau_c]. \quad (29)$$

Статистическая суть функции  $Q$  подтверждается корреляцией константы  $A$  с коэффициентом гомогенности  $m$  в теории хрупкой прочности Вейбулла. Действительно, если материал находится в идеально хрупком состоянии, то  $\chi = 0$ . В данном случае, как это следует из (29), константа  $A = \sigma_p / \tau_c$ , а в соответствии с теорией Вейбулла

$$\sigma_p / \tau_c = [(m+2)/(4m+4)]^{1/m},$$

откуда получим

$$A = \sqrt[m]{(m+2)/(4m+4)} \approx 1 - 1/m. \quad (30)$$

Коэффициент гомогенности  $m$  можно определить по результатам испытаний образцов разных размеров по формуле Гумбеля на основании рассеяния данных испытаний партии одинаковых образцов или методом ЛМ-твердости [17].

Правая часть уравнения (28) (эквивалентное напряжение) имеет логическую геометрическую интерпретацию. На рис. 6,а в относительных координатах  $\sigma_i/\sigma_p$ ,  $\sigma_0/\sigma_p$  приведены предельные кривые для трех значений параметра  $\chi$ . Константа  $A$  принята равной 0,75. Из рис. 6,а определяются следующие зависимости геометрии поверхности от параметра  $\chi$ : при переходе к более хрупким материалам (меньшие значения  $\chi$ ) влияние шарового тензора и вида девиатора увеличивается. Так, если при  $\chi = 0,75$  предельные поверхности мало отличаются от поверхности вращения, то при  $\chi = 0,25$  девиаторные сечения имеют форму криволинейных треугольников.

Взаиморасположение отдельных участков предельных поверхностей зависит от шарового тензора. При значениях, близких к  $\sigma_0 = 0$ , поверхность (17) находится внутри поверхности (28) – рис. 6,а. Таким образом, в этой области относительная прочность структурно-неоднородного материала выше относительной прочности однородного материала.

Для точек пространства напряжений, которые лежат на линиях пересечения поверхностей, эквивалентные напряжения в соответствии с критериями (17) и (28) должны быть равны между собой, если

$$\sigma_1 = 0 \quad (31)$$

и

$$1 - J = 0 \quad (A^{1-J} = 1). \quad (32)$$

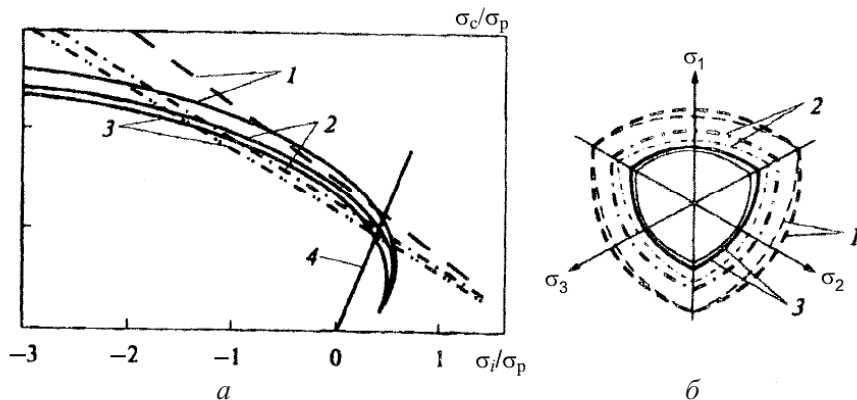


Рис. 6. Геометрическая интерпретация условий (17) (неплошные линии) и (28) (сплошные линии) в плоскостях  $\mu_\sigma = \text{const}$  (а: 1 -  $\mu_\sigma = 1$ ; 2 -  $\mu_\sigma = 0$ ; 3 -  $\mu_\sigma = -1$ ; 4 -  $\sigma_0 = \sigma_p/\sqrt{3}$ ) и  $\sigma_0 = \text{const}$  (б: 1 -  $\sigma_0 = \sigma_c/\sqrt{3}$ ; 2 -  $\sigma_0 = 0$ ; 3 -  $\sigma_0 = \sigma_p/\sqrt{3}$ ).

Условие (31) отвечает отрицательным значениям шарового тензора, поскольку при  $\sigma_1 = \sigma_{\text{max}}$  напряжения  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  меньше нуля. Подставляя условие (31) в формулу (28), получаем

$$\sigma_i = \sigma_p / \chi. \tag{33}$$

Итак, в области сжатия линия пересечения предельных поверхностей (17) и (28) находится на круговом цилиндре (33), ось которого равнонаклонена к направлениям главных напряжений. При гидростатическом сжатии и напряженных состояниях, близких к нему, уравнения (17) и (28) прочности не ограничивают.

Интенсивность напряжений  $\sigma_i$  всегда положительна. Поэтому условие (32) справедливо только при положительном значении  $\sigma_0$ . На основании (32) получим

$$1 - 3\sigma_p / \sigma_i = 0,$$

откуда

$$\sigma_i = 3\sigma_0. \tag{34}$$

Тогда в области растяжения линия пересечения предельных поверхностей (уравнения (17) и (28)) независимо от параметра  $\chi$  находится на равнонаклоненном к главным осям круговом конусе (формула (34)).

Вершина предельной поверхности (28) совпадает с началом координат, что соответствует нулевой прочности структурно-неоднородного материала при гидростатическом растяжении. Это обстоятельство находится в соответствии с принятой моделью материала. Действительно, в связи с отсутствием касательных напряжений при равномерном трехосном растяжении перераспределения напряжений возле дефектов не происходит, в результате чего коэффициент концентрации напряжений достигает достаточно высоких значений, что должно приводить практически к полному падению сопротивления материала.



Учет статистического аспекта прочности путем ввода в критерий (17) дополнительной функции в виде (27) приводит к хорошему соответствию результатов теоретических расчетов опытным данным. Достоверность условия (28), даже при использовании среднестатистического значения константы  $A$  ( $A = 0,75$ ), подтверждается результатами испытаний углеродистых сталей и серых чугунов при низких температурах (А. А. Лебедев, 1963–1993 гг.), разных марок графита (А. М. Фридман, 1974 г.), металлокерамических композитов на основе карбида кремния, в том числе при высоких температурах (А. А. Лебедев, 1964 г.), хрупких терморезистивных пластмасс (К. Н. Кан и Ю. С. Первушин, 1966 г.) и др. [14].

На рис. 7 в качестве примера приведены данные, полученные автором при испытаниях стали ( $C \approx 0,37\%$ ) в условиях нормальной и низкой температур. Как видно, при нормальной температуре текучесть исследованной стали удовлетворительно описывается условием Мизеса, а разрушение – условием Кулона. Однако при понижении температуры, как уже отмечалось, расширение области безопасных напряжений сопровождается изменением формы предельной кривой. Общая тенденция такова, что в первом квадранте происходит относительное уменьшение сопротивления материала, во втором (растяжение–сжатие), наоборот – относительное увеличение. В результате экспериментальные точки, соответствующие пределу текучести при двухосном растяжении, лежат внутри эллипса Мизеса, а при чистом сдвиге – вне его. Кроме того, с понижением температуры происходит более интенсивный рост сопротивления материала одноосному сжатию по сравнению с сопротивлением одноосному растяжению. Эти результаты являются прямым подтверждением, с одной стороны, обоснованности подходов, положенных в основу проведенного анализа трансформации формы девиаторного сечения поверхности при охлаждении металла (рис. 2), с другой – высокой достоверности предложенных критериев прочности.

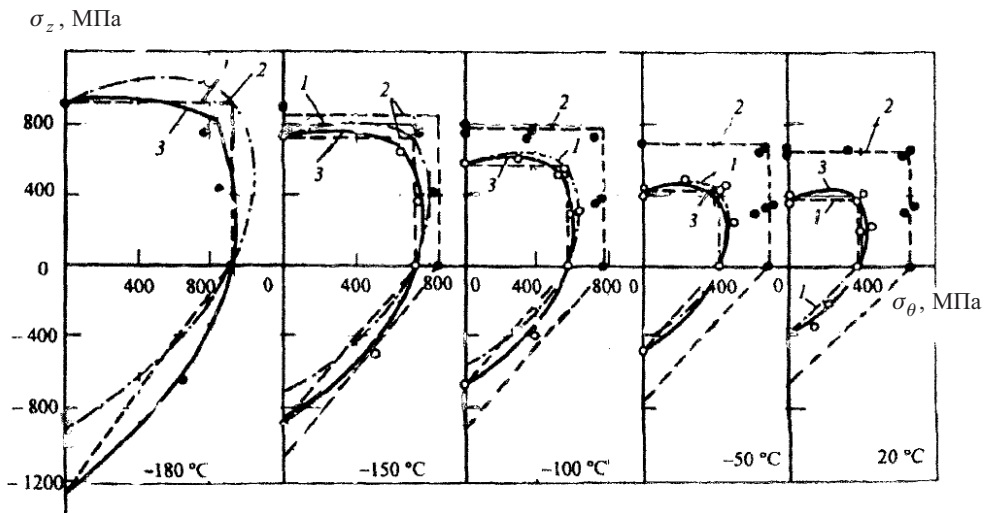


Рис. 7. Предельные диаграммы текучести (светлые точки) и прочности (темные точки) стали (0,37% С) в условиях плоского напряженного состояния при различных температурах: 1, 2, 3 – соответственно по условиям Мизеса (3), Кулона–Мора (19) и (28).

Рассмотренные теории прочности прошли экспертизу на физическую достоверность в 52 НИИ, КБ и ведущих машиностроительных предприятиях страны. Получено 37 заключений, в 30 из которых одобрены использованные подходы. Имеющиеся в трех отзывах замечания касаются формы представления подготовленных материалов и учтены в окончательной редакции. Замечания в остальных четырех отзывах связаны с неправильным пониманием идеологии предлагаемых методик в связи с краткостью изложения, на что были даны необходимые дополнительные разъяснения.

Руководящие материалы, в том числе государственные стандарты, регламентирующие расчеты элементов конструкций на прочность при сложном напряженном состоянии, представлены в работах [18–31 и др.].

## Резюме

Проведено короткий аналіз історії розвитку механічних теорій міцності матеріалів, їх переваг і недоліків. Отримано фізично достовірний і експериментально обґрунтований критерій еквівалентності квазіоднорідних матеріалів. Структура критерію визначена за результатами аналізу рівняння граничної поверхні, форма якої задовольняє необхідні і достатні вимоги, що впливають із основних законів і постулатів механіки деформованого твердого тіла. Рівняння включає інваріанти, що контролюють руйнування шляхом зсуву і відриву. Степені відповідальності кожного з цих актів ставиться у відповідність параметр пластичності матеріалу, що присутній у рівнянні у вигляді вагового коефіцієнта, який визначається за результатами випробувань при розтягті і стиску. Отримано умову граничного стану матеріалів із неоднорідною структурою шляхом введення в критерій функції впливу, що враховує статистичні аспекти міцності матеріалів у зв'язку з наявністю в них "слабких місць" (пошкоджень). Визначення структури функції впливу зведене до розв'язку задачі теорії вірогідності про повторну вибірку заданого об'єму.

1. *Mao-Hong Yu*. Advances in strength theories for materials under complex stress state the 20th century // *Appl. Mech. Rev.* – 2002. – **55**, No. 3. – P. 169 – 218.
2. *Писаренко Г. С., Лебедев А. А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1976. – 415 с.
3. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Мир, 1969. – 863 с.
4. *Хосферд В. Ф.* Обобщенный критерий текучести для изотропного материала // *Trans. ASME.* – 1972. – No. 2. – P. 290 – 294.
5. *Lade P. V. and Duncan J. M.* Cubical triaxial tests on cohesionless soil // *J. Soil. Mech. Found. Div.* – 1973. – ASCE 99 (SM 10). – P. 793 – 812.
6. *Писаренко Г. С., Лебедев А. А.* О форме предельной поверхности механического критерия прочности // *Прикл. механика.* – 1968. – Вып. 3. – С. 45 – 50.

7. *Chang Ching S.* Micromechanical modeling of deformation and failure for granulates with frictional contacts // *Mech. Mater.* – 1993. – **16**, No. 1, 2. – P. 13 – 24.
8. *Matsuoka H.* Stress-strain relationships of sands based on the mobilized plane // *Soils Found.* – 1992. – **14**, No. 2. – P. 47 – 61.
9. *Лебедев А. А.* О возможном совмещении условия пластичности и хрупкого разрушения // *Прикл. механика.* – 1968. – Вып. 4. – С. 85 – 93.
10. *David M.* Stabilite courbe interinsegne et courbes de traction et compression dum materiau repondant a certaines conditions de structure // *Ann. Ponts Chaussees.* – 1953. – **6**. – P. 123 – 128.
11. *Друккер Д.* О единственности решений в теории пластичности // *Механика.* – 1957. – **4**. – С. 72 – 80.
12. *Matsuoka H., Hoshikawa T., and Ueno K.* A general failure criterion and stress-strain relation for granular materials to metals // *Soils Found.* – 1990. – **30**, No. 2. – P. 119 – 127.
13. *Yu M. N.* *Twin Theory and Its Application.* – Beijing: Seine Press, 1998. – 834 p.
14. *Лебедев А. А., Ковальчук Б. И., Гигиняк Ф. Ф., Ламашевский В. П.* Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии: Справочник. – Киев: Издательский дом “Ин Юре”, 2003. – 540 с.
15. *Койтер В. Т.* *Механика.* – М., 1967. – 1960 с.
16. *Давиденков Н. Н.* Некоторые проблемы механики материалов. – Л.: Лениздат, 1943. – 240 с.
17. *Пат. України № 52107 А.* МКІ 7 GO1N3/00, GO1N3/40 / А. О. Лебедев, М. Р. Музыка. Спосіб оцінки деградації матеріалу внаслідок накопичення пошкоджень в процесі напрацювання. “Метод LM-твердості”. – Чинний з 15.01.2003. – Бюл. № 1.
18. *ДСТУ 2464-94.* Розрахунки та випробування на міцність. Методи визначення еквівалентних і допустимих напружень від статичного навантаження. – Київ: Держстандарт України, 1994. – 6 с.
19. *ГОСТ 25.501-78.* Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Методы испытания на контактную усталость. – М.: Госкомстандарт СССР, 1979. – 94 с.
20. *ОСТ 26-04-2585-80.* Техника криогенная и криогенно-вакуумная. Нормы и методы расчета на прочность, усталость, и длительную прочность сварных конструкций. – М.: Госкомстандарт СССР, 1981. – 61 с.
21. *Лебедев А. А., Ковальчук Б. И., Ламашевский В. П. и др.* Расчеты при сложном напряженном состоянии (определение эквивалентности напряжений) / АН УССР. Ин-т пробл. прочности. – Препр. – Киев, 1979. – 63 с.
22. *Методические рекомендации.* Расчетно-экспериментальный метод определения параметров ползучести и длительной прочности при сложном напряженном состоянии. – М.: Госкомстандарт СССР, 1985. – 36 с.

23. *Методические рекомендации. Методы определения эквивалентных и допускаемых напряжений при статическом нагружении / АН УССР. Ин-т пробл. прочности. – Препр. – Киев, 1983. – 32 с.*
24. *P50-54-30-85. Расчеты и испытания на прочность. Методы испытания на контактную усталость. – М.: Госкомстандарт СССР, 1988. – 122 с.*
25. *Писаренко Г. С., Азарев В. А., Квитка В. Л. и др. Сопротивление материалов / Под ред. акад. АН УССР Г. С. Писаренко. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.*
26. *Божедарник В. В., Сулим Г. Т. Элементы теорії пластичності та міцності. Т. 1 і 2. – Львів: Світ, 1999. – 942 с.*
27. *Биргер И. А., Мавлютов Р. Р. Сопротивление материалов. Учеб. пособие. – М.: Наука, 1986. – 560 с.*
28. *Павлов П. А. Механическое состояние и прочность материалов. Учеб. пособие. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. – 175 с.*
29. *Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності. Підручник. Ч. I, II / За ред. проф. В. Г. Піскунова. – Київ: Вища шк., 1994-1995. – 1203 с.*
30. *Корнілов О. А. Опір матеріалів. 3-є вид. – Київ: Логос, 2003. – 552 с.*
31. *Троценко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др. Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справочное пособие. Ч. 1. – Киев: Наук. думка, 1993. – 288 с.*

Поступила 21. 11. 2009