

## **Метод приближенного аналитического определения вибродиагностического параметра наличия трещины в упругой системе с распределенными параметрами при супер- и субгармоническом резонансах**

**В. В. Матвеев, О. Е. Богинич, А. П. Яковлев**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Рассматривается приближенный метод расчета вибродиагностического параметра наличия трещины в упругой системе с распределенными параметрами при супер- и субгармоническом резонансах. Метод базируется на нахождении характеристики нелинейности упругой системы на основе анализа ее вынужденных колебаний в неповрежденном состоянии и использовании результатов приближенного аналитического определения параметров нелинейности колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной, моделируемого системой с одной степенью свободы с асимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы, при указанных резонансах.*

**Ключевые слова:** супер- и субгармонический резонансы, вибродиагностика усталостного повреждения, закрывающаяся трещина, нелинейные колебания, упругая система с распределенными параметрами.

**Введение.** Интерес к изучению колебаний упругих тел при наличии повреждений типа усталостных трещин обусловлен необходимостью, с одной стороны, оценки возможного изменения вибрационного состояния элементов конструкций в процессе их эксплуатации, с другой – разработки эффективных методов вибродиагностики таких повреждений. При этом одним из наименее исследованных направлений является установление расчетных зависимостей между параметрами закрывающейся трещины нормального отрыва и колебательного процесса при супер- и субгармоническом резонансах. Это связано со сложностью аналитического решения задачи о вынужденных колебаниях получаемой существенно нелинейной системы.

В этом направлении известен ряд исследований. Так, в работе [1] с использованием принципа Остроградского–Гамильтона и метода Ритца рассматривалась задача о поперечных колебаниях призматической балки с закрывающейся трещиной при супергармоническом резонансе 2-го порядка под воздействием гармонической сосредоточенной поперечной силы. Ослабление изгибной жесткости балки при открытой трещине интерпретировалось как местное уменьшение эффективного сечения балки в ограниченной области, аппроксимируемой треугольной призмой с прямым углом в вершине и высотой, равной глубине трещины. Принималось, что в области резонанса балка совершает колебания, близкие к одной из собственных форм, и математическая модель таких колебаний представлялась одним обыкновенным дифференциальным уравнением, в котором знак члена, соответствующего так называемой приведенной глубине трещины, определялся знаком квазинормальной координаты. Далее с использованием метода усреднения составлялась система не зависящих от времени дифференциальных уравнений для опре-

деления амплитуды и фазы основной второй гармоники колебательного процесса.

Задача о вынужденных колебаниях прямоугольной пластины, содержащей продольные дефекты целостности типа закрывающихся трещин, рассматривалась в работе [2] для случая супергармонического резонанса второго порядка первой формы поперечных колебаний. Для ее решения также использовались принцип Остроградского–Гамильтона и метод Ритца при аналогичном аппроксимировании локального ослабления целостности призматической областью с прямым углом у вершины трещины. После ряда допущений и неэлементарных вычислений коэффициентов полученной системы дифференциальных уравнений задача о вынужденных колебаниях под действием гармонической распределенной нагрузки однородной пластины, опертой по краям, приводилась к обыкновенному дифференциальному уравнению. При этом знак второго члена обобщенной жесткости, учитывающего влияние дефекта целостности и обуславливающего нелинейность уравнения, определялся знаком перемещения. Отыскивалось приближенное трехчленное периодическое решение, в котором неизвестными являлись постоянная составляющая, амплитуда второй гармоники и сдвиги фаз обеих гармоник. Получаемая в конечном итоге система алгебраических уравнений для определения неизвестных решалась методом последовательных приближений.

Ввиду сложностей аналитического решения такого рода задач и нахождения удобных для вычисления определяющих уравнений обычно применяют численные решения с использованием конечноэлементной модели упругого тела [3–9]. Иногда применяют электрическое аналоговое моделирование получаемой системы конечноразностных уравнений, аппроксимирующей, например, дифференциальное уравнение изгибных колебаний стержневого элемента с заданным законом распределения массы и изгибной жесткости сечения [10, 11]. Периодическое изменение изгибной жесткости сечения с трещиной при ее открытии-закрытии моделируется изменением соответствующей емкости в электрической модели, осуществляемым с помощью нелинейного блока. На основании полученных результатов был предложен вибродиагностический метод поиска усталостных трещин в крыльях летательных аппаратов [12, 13].

Не останавливаясь на анализе результатов по оценке уровня нелинейности колебательного процесса при кратных или дробных резонансах, следует обратить внимание на отмеченную в работе [6] важную особенность рассмотрения получаемой системы дифференциальных уравнений колебаний упругого тела в главных (нормальных) координатах.

Так, обычно для каждой главной координаты уравнение на полуцикле открытой трещины отличается от такового на полуцикле закрытой трещины матрицей демпфирования и, главным образом, матрицей жесткости, а обобщенная сила, т.е. вектор работы вынуждающей силы на перемещениях данной собственной формы, принимается неизменной. Поскольку значение параметра нелинейности колебательного процесса, как показывает анализ, определяется в основном решением уравнения, соответствующего резонирующей форме колебаний, то, как, например, и при аналитическом решении [1], ограничиваются рассмотрением только этого уравнения. Отмеченная неизмен-

ность обобщенной силы обуславливает практическую независимость нелинейности колебательного процесса от места приложения вынуждающей силы при любом расположении трещины. На примере возбуждения изгибных колебаний стержней гармонической сосредоточенной поперечной силой при супергармоническом резонансе 2-го порядка и субгармоническом резонансе порядка  $1/2$  было показано, что учет различия в обобщенной силе на полциклах открытой и закрытой трещины обуславливает существенную зависимость параметра нелинейности колебаний от места приложения вынуждающей силы вдоль стержня. Так, для консольного стержня длиной  $l$  при супергармоническом резонансе 2-го порядка на рис. 1 показана зависимость основного параметра нелинейности колебаний – относительной амплитуды  $\bar{A}_2^a$  ускорения второй гармоники – от точки приложения поперечной вынуждающей силы  $x_P = 0,05 - 0,95l$  для двух случаев местоположения поперечной трещины  $x_T = 0,1l$  и  $0,5l$ . Рассматривалась конечноэлементная модель стержня прямоугольного поперечного сечения с модулем упругости материала  $E = 200$  ГПа при отношении высоты сечения к длине стержня, равном  $0,087$ , относительной глубине трещины  $\gamma = 0,1$  и  $0,2$  и логарифмическом декременте колебаний  $0,01$  [14].

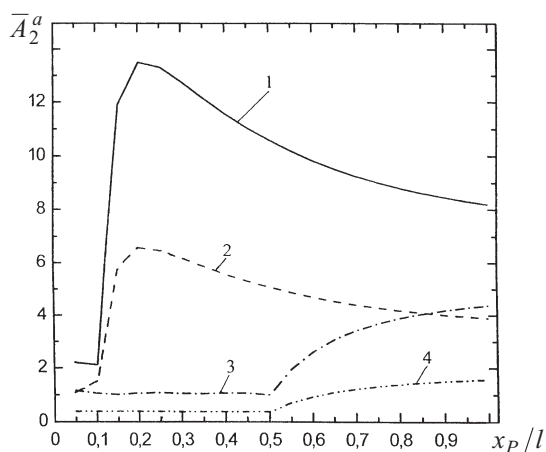


Рис. 1. Зависимость относительной амплитуды ускорения второй гармоники от места приложения вынуждающей силы для консольного стержня при супергармоническом резонансе 2-го порядка первой формы колебаний: 1 –  $\gamma = 0,2$ ,  $x_T/l = 0,1$ ; 2 –  $\gamma = 0,1$ ,  $x_T/l = 0,1$ ; 3 –  $\gamma = 0,2$ ,  $x_T/l = 0,5$ ; 4 –  $\gamma = 0,1$ ,  $x_T/l = 0,5$ .

Целью настоящего сообщения является рассмотрение возможности получения приближенного аналитического решения для определения вибродиагностических параметров наличия закрывающейся трещины нормального отрыва в упругой системе с распределенными параметрами при кратном или дробном резонансах. При этом предполагается с использованием полученных ранее [15–19] приближенных решений в случае моделирования упругой системы системой с одной степенью свободы, обуславливающим пренебрежение различием форм колебаний упругого тела при открытой и закрытой трещине, найти решение, позволяющее учитывать особенности приложения вынуждающей нагрузки к упругой системе с распределенными параметрами без учета изменения формы ее колебаний при открытии трещины.

Следует заметить, что в случае моделирования упругой системы системой с одной степенью свободы первоначально рассматривалось аналитическое решение для области основного резонанса [20, 21], где оказался эффективным аналитический метод нелинейной механики Крылова–Боголюбова, впервые примененный Г. С. Писаренко [22, 23] и затем широко использовавшийся для расчета колебаний слабонелинейных систем гистерезисного типа. При этом было показано [22, 23], что для таких систем в случае основного резонанса достаточную точность дает первое приближение, поскольку для возможных диссипативных свойств конструкционных материалов значения амплитуды высших гармоник, как и постоянной составляющей, оказались пренебрежимо малы. Для нелинейности, обусловленной закрывающейся трещиной и моделируемой асимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы, из решения задачи во втором приближении было получено, что даже при незначительном изменении собственной частоты (на 0,1%) вследствие наличия трещины постоянная составляющая почти на четыре порядка, а амплитуда наибольшей из высших гармоник на порядок выше соответствующих параметров, определяемых возможной нелинейностью гистерезиса. Достоверность аналитического решения была подтверждена данными проведенного экспериментального исследования изгибных колебаний консольного стержня из стали 15Х2НМФА прямоугольного поперечного сечения с краевой поперечной трещиной с относительной глубиной  $\gamma = 0,17 \dots 0,37$  [24]. Однако определяемые при этом максимальные значения постоянной составляющей и амплитуды второй гармоники по отношению к амплитуде основной гармоники достигали лишь 8 и 2,3% соответственно, что недостаточно для использования их в качестве чувствительных вибродиагностических параметров наличия трещины. Однако, с другой стороны, именно эти результаты позволяют представить искомое аналитическое решение для случаев супер- и субгармонического резонансов в четко определенном и наиболее простом виде.

**Методика предлагаемого решения.** Проведенные приближенные аналитические исследования вынужденных колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной, моделируемого системой с одной степенью свободы с асимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы, позволяют получить в конечном итоге простые зависимости параметров нелинейности колебательного процесса при супер- и субгармоническом резонансах от обобщенного параметра нелинейности системы  $\alpha$ , равного относительному изменению жесткости упругого тела при открытой трещине [15–19]. Однако при использовании результатов, полученных на такой одночастотной модели, в случае рассмотрения резонанса какой-либо конкретной формы собственных колебаний упругого тела с распределенными параметрами, наряду с очевидным исключением различия между формами колебаний при закрытой и открытой трещине, возникает вопрос о корректности определения параметра  $\alpha$ . Проведенные расчеты показывают, что если этот параметр определять из анализа напряженного состояния упругого тела при деформировании по рассматриваемой резонирующей форме колебаний, то его значение, как и соответствующее значение параметра нелинейности колебательного процесса, не зависит от особенности возбуждения колебаний (рис. 1).

Поэтому на первом этапе решения задачи в общем случае будем полагать, что при исследовании дробного или кратного резонанса какой-либо  $j$ -й формы собственных колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной исходное значение параметра нелинейности  $\alpha$  определяется при данных размерах и местоположении трещины напряженным состоянием тела на стадии его чисто вынужденных колебаний до проявления резонанса. Для этого следует рассмотреть установившиеся вынужденные колебания цельного упругого тела при заданном виде гармонического нагружения с частотой  $\nu = \frac{1}{n} \omega_j$  – при супергармоническом резонансе  $n$ -го порядка и  $\nu = n \omega_j$  – при субгармоническом резонансе порядка  $1/n$  ( $\omega_j$  – частота резонирующей  $j$ -й собственной формы колебаний упругого тела).

Параметр нелинейности  $\alpha$  такой упругой системы при ее деформировании в условиях вынужденных колебаний находим через энергетическую характеристику повреждения  $\kappa$  [25]:

$$\alpha = \frac{\kappa}{1 + \kappa}, \tag{1}$$

где  $\kappa$  представляет отношение приращения потенциальной энергии деформации упругого тела  $\Delta\Pi_T$ , обусловленное возможным наличием трещины при известном номинальном напряженном состоянии в месте ее расположения, к потенциальной энергии деформации тела  $\Pi_0$  в заданных условиях его нагружения:

$$\kappa = \frac{\Delta\Pi_T}{\Pi_0}. \tag{2}$$

Выражение для  $\Delta\Pi_T$  при наличии в нагруженном плоском теле плоской трещины нормального отрыва площадью  $F_T$  и контуром  $\Gamma$ , определяемое из энергетических соотношений линейной механики разрушения, можно представить в виде

$$\Delta\Pi_T = \frac{1}{E_1} \iint_{(F_T)} K_1^2 \delta\vec{r} \cos\Theta d\Gamma, \tag{3}$$

где  $K_1$  – коэффициент интенсивности нормальных напряжений в сечении расположения трещины;  $\delta\vec{r}$  – вектор возможного смещения точек фронта трещины;  $\Theta$  – угол между  $\delta\vec{r}$  и нормалью к фронту трещины;  $E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}$  –

при плоской деформации;  $E_1 = E$  – при плоском напряженном состоянии;  $E$  и  $\mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала.

Примеры определения параметров  $\kappa$  и  $\alpha$  при растяжении и изгибе стержней прямоугольного поперечного сечения, а также изгибе прямоугольных пластин в случае наличия различного вида трещин нормального отрыва при их колебаниях по собственным формам рассмотрены соответственно в [21, 26] и [27, 28].

Определяя для заданных условий гармонического возбуждения колебаний исследуемого упругого тела вне основного резонанса параметр  $\alpha$  (1), соответствующий форме вынужденных колебаний системы, и, располагая характеристикой ее демпфирующей способности, например логарифмическим декрементом колебаний  $\delta$ , переходим ко второму этапу решения, т.е. определяем параметры нелинейности колебательного процесса при соответствующем резонансе, используя результаты приближенного аналитического решения задачи о вынужденных колебаниях эквивалентной системы с одной степенью свободы [16, 18, 19]. Заметим, что если на первом этапе рассматривается соотношение  $\nu/\omega_j$ , то на втором –  $\nu/\bar{\omega}_j$ , которые равны  $1/n$  при супер- и  $n$  при субгармоническом резонансах. Здесь  $\bar{\omega}_j$  – собственная частота  $j$ -й резонирующей формы колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной, которая вычисляется через  $j$ -ю собственную частоту цельного тела  $\omega_j$  по формуле [15]

$$\bar{\omega}_j = \frac{2\sqrt{1-\alpha_j}}{1+\sqrt{1-\alpha_j}}\omega_j = \frac{2}{1+\sqrt{1+\kappa_j}}\omega_j, \quad (4)$$

где  $\kappa_j$  и  $\alpha_j$  соответствуют деформированию упругого тела при рассматриваемой  $j$ -й собственной форме колебаний, т.е. при основном резонансе ( $\nu = \omega_j$ ). Как очевидно, значения  $\kappa$  и  $\alpha$ , соответствующие вынужденным колебаниям при  $\nu \neq \omega_j$ , не эквивалентны  $\kappa_j$  и  $\alpha_j$ .

Так, для наиболее значимого по уровню колебаний настроенного супергармонического резонанса 2-го порядка какой-либо  $j$ -й собственной формы колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной ( $\nu = \frac{1}{2}\bar{\omega}_j$ ) имеем следующие приближенные зависимости для основного параметра нелинейности вынужденных колебаний – относительной амплитуды второй гармоники  $\bar{A}_2 = A_2/A_1$  в случае слабого резонанса ( $A_2 < A_1$ ) [16]:

$$\bar{A}_2 \approx \frac{\alpha \left[ (2-\alpha) \frac{\pi}{4} - 2 \right]}{2 \frac{\delta \bar{\omega}_j}{\pi \omega_j}} \cos \Delta\theta = \frac{\alpha \left[ (2-\alpha) \frac{\pi}{4} - 2 \right]}{(2-\alpha) - 2 \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\omega_j} \right)^2} \sin \Delta\theta, \quad (5)$$

где

$$\Delta\theta = \arctg \frac{(2-\alpha) - 2 \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\omega_j} \right)^2}{2 \frac{\delta \bar{\omega}_j}{\pi \omega_j}}, \quad (6)$$

и сильного резонанса ( $A_2 > A_1$ ) [19]:

$$\bar{A}_2 \approx \sqrt{\frac{\left\{0,5 \left[1 - \left(\frac{\bar{\omega}_j}{\omega_j}\right)^2\right] - \alpha\right\} \operatorname{tg} \Delta\theta + \alpha}{4 \frac{\delta \bar{\omega}_j}{\pi \omega_j}}} = \sqrt{\frac{\left\{\alpha - 0,5 \left[1 - \left(\frac{\bar{\omega}_j}{\omega_j}\right)^2\right]\right\} \operatorname{ctg} \Delta\theta - \alpha}{4 \frac{\delta \bar{\omega}_j}{\pi \omega_j}}}, \quad (7)$$

где

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \arcsin \left\{ 1 - \frac{0,5}{\alpha} \left[ 1 - \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\omega_j} \right)^2 \right] \right\}. \quad (8)$$

В случае настроенного субгармонического резонанса порядка 1/2 ( $\nu = 2\bar{\omega}_j$ ) имеем следующие приближенные зависимости основного параметра нелинейности колебаний – относительной амплитуды первой гармоники  $\bar{A}_{1/2} = A_1/A_2$  при слабом резонансе ( $A_1 < A_2$ ) [17]:

$$\bar{A}_{1/2} \approx \frac{2\alpha}{\frac{2}{\sin \Delta\theta} \left[ (2-\alpha) - 2 \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\omega_j} \right)^2 \right] + \alpha(2-\alpha)} = \frac{2\alpha}{\alpha(2-\alpha) - \frac{2}{\cos \Delta\theta} \left( \alpha - 2 \frac{\delta \bar{\omega}_j}{\pi \omega_j} \right)}, \quad (9)$$

где

$$\Delta\theta = -\operatorname{arctg} \frac{(2-\alpha) - 2 \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\omega_j} \right)^2}{\alpha - 2 \frac{\delta \bar{\omega}_j}{\pi \omega_j}}, \quad (10)$$

и при сильном резонансе ( $A_1 > A_2$ ) [19]:

$$\bar{A}_{1/2} \approx \frac{\alpha \sin \Delta\theta}{\left[ (2-\alpha) - 2 \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\omega_j} \right)^2 \right] - 0,57 \alpha^2} = \frac{\alpha \cos \Delta\theta}{2 \frac{\delta \bar{\omega}_j}{\pi \omega_j}}, \quad (11)$$

где

$$\Delta\theta = \operatorname{arctg} \frac{\left[ (2-\alpha) - 2 \left( \frac{\bar{\omega}_j}{\omega_j} \right)^2 \right] - 0,57 \alpha^2}{2 \frac{\delta \bar{\omega}_j}{\pi \omega_j}}. \quad (12)$$

Анализ приведенных зависимостей (4)–(12) показывает, что с достаточным приближением их можно представить в виде простых формул, четко определяющих характер зависимостей при легко вычисляемых значениях параметра нелинейности колебаний:

$$\bar{A}_2 \approx 0,69(\alpha/\delta) \quad \text{при} \quad \alpha/\delta < 1,0 \quad (13a)$$

и

$$\bar{A}_2 \approx 0,72\sqrt{\alpha/\delta} \quad \text{при} \quad \alpha/\delta > 1,0; \quad (13b)$$

$$\bar{A}_{1/2} \approx \frac{\pi}{2} \frac{\alpha}{\delta} \quad \text{при} \quad \alpha/\delta \leq 10. \quad (14)$$

**Иллюстрация использования предложенной методики.** Наличие закрывающейся, или “дышащей” трещины наиболее характерно в случае изгибных колебаний стержневых и пластинчатых элементов конструкций. Наиболее просто определяются параметры  $\kappa$  и  $\alpha$  при наличии поперечной трещины в стержнях прямоугольного поперечного сечения.

Рассмотрим стержень длиной  $l$  с поперечным сечением шириной  $b$  и высотой  $h$  в случае вынужденных колебаний, возбуждаемых приложенной в сечении  $x = x_P$  сосредоточенной гармонической поперечной силой  $P$  с частотой  $\nu$ , соответствующей исследуемому резонансу какой-либо  $j$ -й формы собственных колебаний.

*Первый этап решения задачи.* При известном описании амплитудной зависимости линии прогибов цельного стержня функцией  $y(x, x_P)$  коэффициент интенсивности напряжений в сечении  $x = x_T$  расположения поперечной краевой трещины глубиной  $a$  определяется выражением

$$K_1 = \frac{1}{2} E h^{3/2} \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_T} \sqrt{\pi \gamma} F_1(\gamma),$$

а приращение потенциальной энергии (3), обусловленное наличием трещины, –

$$\Delta \Pi_T = \frac{1}{4} \pi b h^4 E \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_T}^2 \int_0^\gamma \gamma F_1^2(\gamma) d\gamma. \quad (15)$$

Здесь функцию  $F_1(\gamma)$  можно представить, например, в виде [29]

$$F_1(\gamma) = \sqrt{\frac{2}{\pi \gamma} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi \gamma}{2} \right)} \frac{0,923 + 0,199 \left[ 1 - \sin \left( \frac{\pi \gamma}{2} \right) \right]^4}{\cos \left( \frac{\pi \gamma}{2} \right)}, \quad (16)$$

где  $\gamma$  – относительная глубина трещины, равная отношению  $a/h$ .



Зная выражение для потенциальной энергии деформации стержня

$$\Pi_0 = \frac{bh^3 E}{24} \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (17)$$

находим энергетическую характеристику повреждения стержня (2):

$$\kappa = \frac{6\pi h \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_T}^2}{\int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx} \int_0^\gamma \gamma F_1^2(\gamma) d\gamma \quad (18)$$

и по формуле (10) – параметр  $\alpha$ . Как видно, характер данной зависимости (18) инвариантен к значению  $\gamma$ , определяющему только уровень параметра  $\kappa$ , поскольку

$$\frac{\kappa(x_P/l, x_T/l, \gamma_1)}{\kappa(x_P/l, x_T/l, \gamma_2)} = \frac{\int_0^{\gamma_1} \gamma F_1^2(\gamma) d\gamma}{\int_0^{\gamma_2} \gamma F_1^2(\gamma) d\gamma}. \quad (19)$$

При этом, учитывая, что интерес представляет супер- или субгармонический резонанс какой-либо  $j$ -й формы собственных колебаний, амплитудную функцию прогибов стержня выразим через амплитудные функции собственных форм колебаний  $y_i(x, x_P)$ :

$$y(x, x_P) = \sum_{i=1}^N y_i(x, x_P). \quad (20)$$

В общем случае формула (18) будет определять обобщенную характеристику повреждения  $\kappa_0$  при

$$\left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)_{x=x_T}^2 = \left[ \sum_{i=1}^N y_i''(x_P, x) \right]_{x=x_T}^2; \quad \int_0^l \left( \frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_0^l [y_i''(x_P, x)]^2 dx. \quad (21)$$

К представленному подходу определения характеристики  $\kappa$  и соответственно параметра  $\alpha$  на начальной стадии вынужденных колебаний упругой системы, т.е. до проявления резонанса, может возникнуть вопрос о целесообразности учета суммы всех  $N$  форм собственных колебаний, так как резонирует только конкретная  $j$ -я форма колебаний и, казалось бы, можно ограничиться определением параметра нелинейности из рассмотрения дефор-

мирования системы по указанной форме. Однако если рассматривать только одну какую-либо  $j$ -ю резонирующую форму колебаний, то характеристика нелинейности, как уже отмечалось выше, не будет зависеть от места приложения вынуждающей силы.

Поэтому при определении характеристики  $\kappa$ , соответствующей деформированию стержня по резонирующей  $j$ -й форме в составе остальных форм собственных колебаний, необходимо учитывать соотношения между значениями  $y_j''(x_P, x)|_{x=x_T}$  и  $\sum_{i \neq j}^N y_i''(x_P, x)|_{x=x_T}$ , обуславливающие особенности

возможного изменения податливости стержня при раскрытии или закрытии трещины по  $j$ -й форме.

При значениях указанных величин одного знака в числителе формулы (18) следует принять

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2 = \left[\sum_{i=1}^N y_i''(x_P, x_T)\right]^2 - \left[\sum_{i \neq j}^N y_i''(x_P, x_T)\right]^2. \quad (22)$$

При разных знаках в случае  $|y_j''(x_P, x_T)| > \left|\sum_{i \neq j}^N y_i''(x_P, x_T)\right|$  получим

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2 = \left[|y_j''(x_P, x_T)| - \left|\sum_{i \neq j}^N y_i''(x_P, x_T)\right|\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^N y_i''(x_P, x_T)\right]^2, \quad (23)$$

в случае  $|y_j''(x_P, x_T)| < \left|\sum_{i \neq j}^N y_i''(x_P, x_T)\right|$  -

$$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=x_T}^2 \approx y_j''(x_P, x_T) \sum_{i=1}^N y_i''(x_P, x_T). \quad (24)$$

В знаменателе формулы (18) во всех этих случаях будет:

$$\int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx = \int_0^l [y_j''(x_P, x)]^2 dx. \quad (25)$$

С целью более краткой иллюстрации использования предложенной методики исследуем вынужденные колебания стержня на двух опорах (рис. 2) под воздействием сосредоточенной поперечной силы  $P = P_0 \sin \nu t$  в случае супергармонического резонанса 2-го порядка первой ( $j = 1$ ) собственной формы

изгибных колебаний ( $\nu = \frac{1}{2} \bar{\omega}_1$ ) при разном положении места приложения силы ( $x = x_P$ ) и поперечной трещины ( $x = x_T$ ). Здесь  $\bar{\omega}_1$  – частота первой формы колебаний стержня с закрывающейся трещиной.

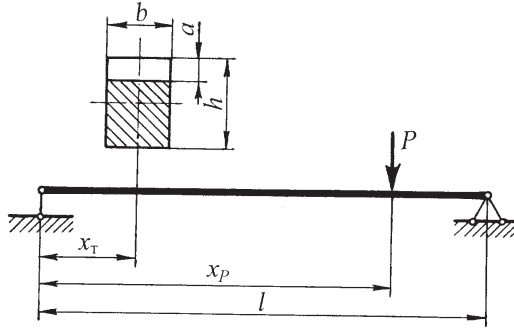


Рис. 2. Схема двухопорного стержня с трещиной, нагруженного вынуждающей сосредоточенной поперечной силой  $P$ .

Следует отметить, что согласно вышеизложенному на первом этапе решения задачи рассматривается колебательная система в виде цельного стержня при частоте гармонического возбуждения  $\nu = \frac{1}{2} \omega_1$  ( $\omega_1$  – частота первой формы собственных колебаний цельного стержня). Параметр нелинейности  $\alpha$  определяется по (1) через характеристику  $\kappa$  (18) в соответствии с указанными вариантами определения квадрата второй производной амплитудной функции перемещения  $y(x, x_P)$  в месте расположения трещины при установившихся вынужденных колебаниях стержня.

Согласно результатам полученного методом главных координат расчета вынужденных стационарных колебаний цельного стержня на двух опорах, вызванных гармонической сосредоточенной силой  $P$  [30], амплитудную функцию линии прогибов можно представить в виде (26), где

$$y_i(x, x_P) = \frac{2P_0 l^3}{\pi^4 EI} \frac{\sin i\pi \frac{x_P}{l} \sin i\pi \frac{x}{l}}{i^4 - (\nu/\omega_1)^2} \quad (26)$$

( $EI$  – изгибная жесткость поперечного сечения стержня).

Используя (18), (21) и (26), получаем выражение для обобщенной энергетической характеристики повреждения стержня при  $\nu = \frac{1}{2} \omega_1$  и учете  $N$ -й суммы амплитудных функций  $y_i(x, x_P)$ :

$$\kappa_0 = 12\pi \frac{h}{l} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{i^2 \sin i\pi \frac{x_P}{l} \sin i\pi \frac{x_T}{l}}{i^4 - 0,25} \right]^2 \left\{ \sum_{i=1}^N \left[ \frac{i^2 \sin i\pi \frac{x_P}{l}}{i^4 - 0,25} \right] \right\}^{-1} \int_0^\gamma \gamma F_1^2(\gamma) d\gamma. \quad (27)$$

Как видно, полученное выражение для характеристики  $\kappa$  явно показывает зависимость ее значения как от относительных размеров трещины ( $\gamma$ ) и стержня ( $h/l$ ) и относительного местоположения трещины ( $x_T/l$ ), так и от относительного положения места приложения вынуждающей силы ( $x_P/l$ ).

При учете только одной первой резонирующей формы собственных колебаний имеем

$$\kappa_1 = 12\pi \frac{h}{l} \sin^2 \pi \frac{x_T}{l} \int_0^\gamma \gamma F_1^2(\gamma) d\gamma, \quad (28)$$

т.е. характеристика нелинейности системы определяется относительными размерами стержня и трещины, а также ее местоположением и не зависит от места приложения вынуждающей силы.

Для характеристики  $\kappa$ , соответствующей деформированию по резонирующей первой форме в составе остальных собственных форм колебаний, согласно (22) и (23) соответственно получим

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{6,75\pi \frac{h}{l}}{\sin^2 \pi \frac{x_P}{l}} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^N \frac{i^2 \sin i\pi \frac{x_P}{l} \sin i\pi \frac{x_T}{l}}{i^4 - 0,25} \right]^2 - \right. \\ & \left. - \left[ \sum_{i=2}^N \frac{i^2 \sin i\pi \frac{x_P}{l} \sin i\pi \frac{x_T}{l}}{i^4 - 0,25} \right]^2 \right\} \int_0^\gamma \gamma F_1^2(\gamma) d\gamma \quad (29) \end{aligned}$$

и

$$\kappa = \frac{6,75\pi \frac{h}{l}}{\sin^2 \pi \frac{x_P}{l}} \left[ \sum_{i=1}^N \frac{i^2 \sin i\pi \frac{x_P}{l} \sin i\pi \frac{x_T}{l}}{i^4 - 0,25} \right]^2 \int_0^\gamma \gamma F_1^2(\gamma) d\gamma. \quad (30)$$

Случая, соответствующего условию (24), для рассматриваемого закрепления стержня не наблюдалось.

Рассчитанные с использованием формул (1) и (27) зависимости параметра нелинейности  $\alpha$  стержня с отношением  $h/l = 0,0833$  от относительной координаты  $x_P/l$  точки приложения вынуждающей силы для различных случаев местоположения трещины  $x_T/l$  при относительной ее глубине  $\gamma = 0,1$  и  $0,2$  представлены на рис. 3 сплошными линиями. Данные расчета приведены при учете пяти первых собственных форм колебаний.

Как видно, значения параметра  $\alpha$  и при  $\gamma = 0,1$  и  $0,2$  весьма значительно зависят от точки приложения вынуждающей силы.

Существенная зависимость параметра  $\alpha$  от места приложения силы объясняется тем, что, несмотря на относительно слабое различие в форме вынужденных колебаний ( $y(x, x_P)$ ) при изменении точки приложения силы

(рис. 4,а), значительно изменяется характер распределения изгибающегося момента  $M(x) = EI(d^2y/dx^2)$  (рис. 4,б). Еще существеннее изменяется функция  $M^2(x)$ , значение которой при  $x = x_T$  определяет в (3) величину квадрата интенсивности напряжений  $K_1$  и соответственно приращение потенциальной энергии (15).

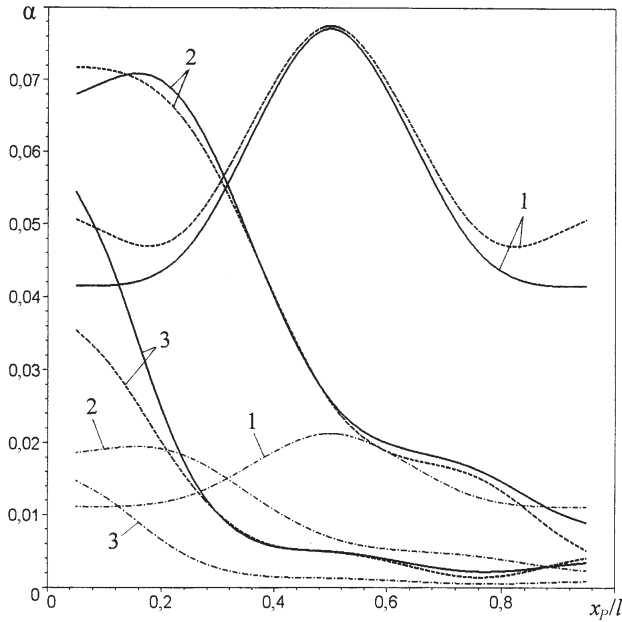


Рис. 3. Зависимость параметра нелинейности  $\alpha$  от относительной координаты  $x_p/l$  места приложения вынуждающей силы, рассчитанная с использованием формул (27) – сплошные линии и (29) – штриховые линии при значении  $\gamma = 0,2$  для различных случаев местоположения трещины: 1 –  $x_T/l = 0,5$ ; 2 –  $x_T/l = 0,25$ ; 3 –  $x_T/l = 0,1$ . (Штрихпунктирные линии – зависимости, полученные с использованием формулы (27) для случая  $\gamma = 0,1$ )

Рассчитанные с использованием формул (29) зависимости  $\alpha(x_p/l)$  при  $\gamma = 0,2$  для разных значений  $x_T/l$  показаны на рис. 3 штриховыми линиями. Как видно, для рассматриваемого стержня различие между полученными по формулам (27) и (29) данными незначительное в области  $0,15 < x_p/l < 0,85$ .

Анализ представленных на рис. 3 зависимостей параметра нелинейности системы  $\alpha$ , вычисляемого на стадии вынужденных колебаний до проявления резонанса, от места приложения вынуждающей силы  $x_p/l$  показывает, что значение  $x_p/l$ , соответствующее экстремуму (кривые 1 и 2) или максимальному значению (кривые 3) функции  $\alpha(x_p/l)$ , близко к значению  $x/l$ , определяющему местоположение трещины ( $x_T/l$ ). Уровень значения функции  $\alpha(x_p/l)$  определяется ее размерами (ср. сплошные и штрихпунктирные линии).

Отметим также определенную зависимость вычисляемых значений параметров  $\kappa$  и  $\alpha$  от количества  $N$  учитываемых собственных форм колебаний стержня. Результаты вычисления по формулам (27) и (29) зависимостей  $\alpha(N)$  для разных случаев местоположения трещины и места приложения вынуждающей силы при  $\gamma = 0,2$  показаны на рис. 5. Как видно, в общем случае

необходимо учитывать не менее пяти–семи форм. Однако следует принимать во внимание, что с ростом номера формы колебаний ограничивается правомочность применения технической теории изгибных колебаний. Различие между данными расчета по формулам (27) и (29) оказалось для рассматриваемого случая возбуждения колебаний шарнирно-опертого стержня значимо только для  $x_T$  и  $x_P$ , равных 0,1.

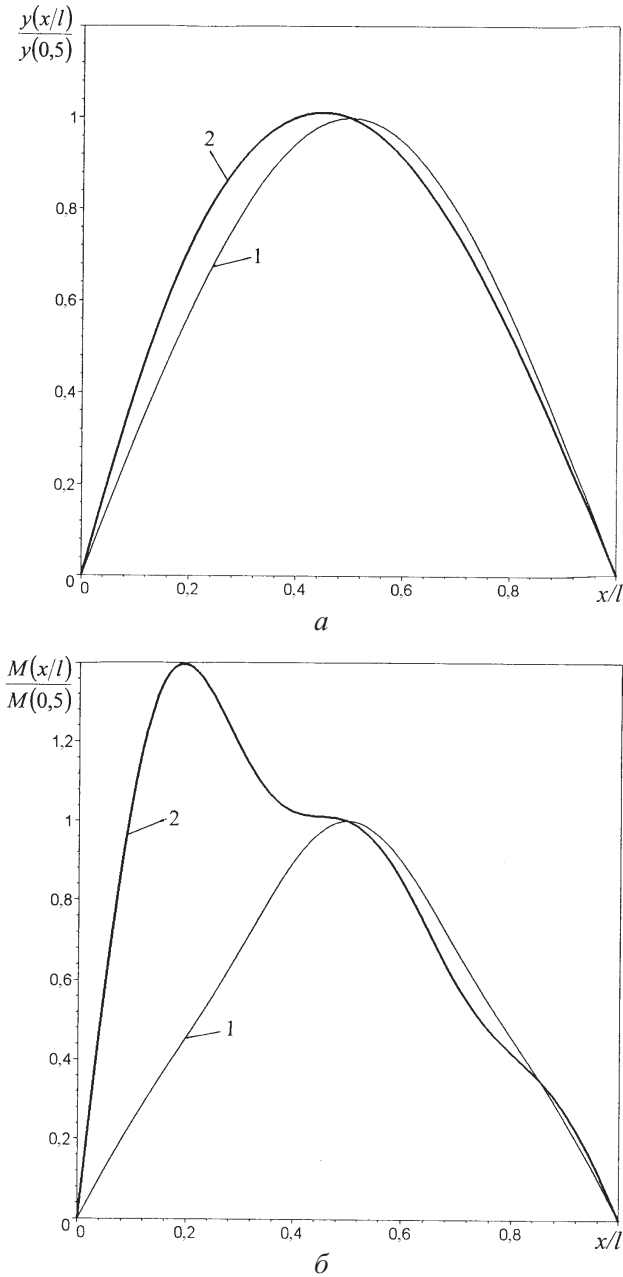


Рис. 4. Зависимости относительного изменения формы вынужденных колебаний стержня (а) и изгибающего момента (б) от места приложения вынуждающей силы: 1 –  $x_P = 0,5$ ; 2 –  $x_P = 0,1$ .

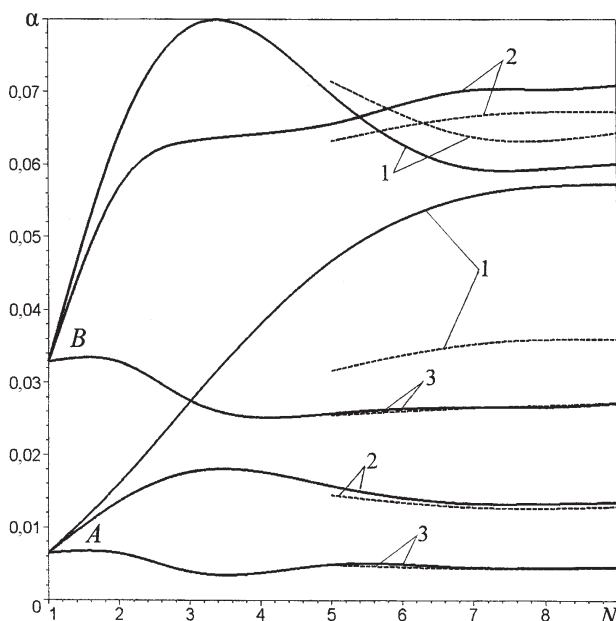


Рис. 5. Зависимость параметра нелинейности  $\alpha$  стержня с расположением трещины  $x_T = 0,1l$  (A) и  $x_T = 0,25l$  (B) от количества  $N$  учитываемых собственных форм колебаний, рассчитанных с использованием формул (27) – сплошные линии и (29) – штриховые линии, при различных значениях координаты  $x_P$  места приложения вынуждающей силы: 1 –  $x_P = 0,1l$ ; 2 –  $x_P = 0,25l$ ; 3 –  $x_P = 0,5l$ .

*Второй этап решения задачи.* По найденным значениям  $\alpha(x_P/l)$  для исследуемого стержня с относительной глубиной трещины  $\gamma = 0,2$  при  $x_T/l = 0,1; 0,25$  и  $0,5$  с использованием формул (27) и (29), (30) и соотношений (13) были рассчитаны соответствующие им величины параметра нелинейности колебательного процесса  $\bar{A}_2$  при декременте колебаний  $\delta = 0,01$ . Для удобства дальнейшего анализа на рис. 6 представлены зависимости относительной амплитуды ускорения второй гармоники  $\bar{A}_2^a$  от места приложения вынуждающей силы для случаев различного расположения трещины  $x_T/l$ . Как видно, характер зависимостей  $\bar{A}_2^a(x_P/l)$  при данном значении  $x_T/l$  подобен зависимостям  $\alpha(x_P/l)$  (рис. 3). Некоторая корректировка происходит за счет нелинейной зависимости  $\bar{A}_2$  от отношения параметра  $\alpha/\delta$  (см. формулы (13)).

Использование значений относительной амплитуды ускорения  $\bar{A}_2^a$  обусловлено тем, что в случае супергармонического резонанса какого-либо  $n$ -го порядка значение относительной амплитуды ускорения  $n$ -й гармоники  $\bar{A}_n^a$ , определяемое при численном решении с помощью спектрального анализа колебательного процесса ускорения, в  $n^2$  раз больше, чем относительная амплитуда перемещения  $\bar{A}_n$ . В рассматриваемом случае супергармонического резонанса 2-го порядка имеем  $\bar{A}_2^a = 4\bar{A}_2$ .

Приведенные результаты свидетельствуют о высокой чувствительности рассматриваемого вибродиагностического параметра к наличию трещины по

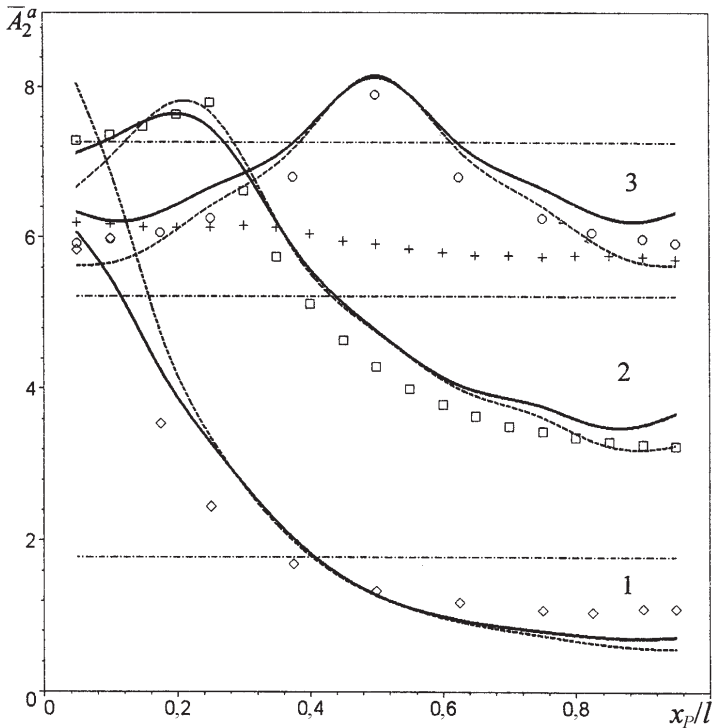


Рис. 6. Зависимость относительной амплитуды ускорения второй гармоники  $\bar{A}_2^a$  резонирующей первой формы колебаний от точки приложения вынуждающей силы при супергармоническом резонансе 2-го порядка, рассчитанная с использованием формул (29), (30) – сплошные линии, (27) – штриховые линии и (28) – штрихпунктирные линии, для случаев различного местоположения трещины: 1 –  $x_r/l = 0,1$ ; 2 –  $x_r/l = 0,25$ ; 3 –  $x_r/l = 0,5$ . (Точки – данные численного решения.)

сравнению с относительным изменением собственной частоты (4) резонирующей ( $j = 1$ ) формы колебаний:

$$\Delta\bar{\omega}_1 = \frac{\bar{\omega}_1 - \omega_1}{\omega_1} = -\frac{1 - \sqrt{1 - \alpha_1}}{1 + \sqrt{1 - \alpha_1}}.$$

Для сравнения в таблице приведены значения  $\Delta\bar{\omega}_1$  и диапазон значений параметра  $\bar{A}_2^a$  для случаев разного местоположения трещины с относительной глубиной  $\gamma = 0,2$ . Как видно, чувствительность амплитуды ускорения второй гармоники на 2-3 порядка выше, чем собственной частоты. Кроме того, использование в качестве индикатора повреждения собственной частоты требует паспортизации исходных ее значений в строго воспроизводимых затем условиях закрепления упругого тела.

Из анализа зависимостей  $\bar{A}_2^a(x_p/l)$ , определенных с использованием формул (27) и (29), (30), следует, что расхождение в результатах при семи и более учитываемых собственных формах колебаний незначительное. Наибольшее расхождение данных наблюдается в диапазоне значений  $0 < x_p/l < 0,2$  и



$0,8 < x_P/l < 1,0$ . Однако следует отметить практическую сложность возбуждения необходимого уровня колебаний упругого тела при приложении вынуждающей силы вблизи узлов колебаний. В качестве иллюстрации малости амплитуды максимального суммарного прогиба  $y_0 = \sum_{i=1}^9 y_i(x=0,5l)$  рассматриваемого стержня при приложении вынуждающей силы вблизи узлов колебаний на рис. 7 приведена зависимость относительной величины этой амплитуды  $\bar{y}_0 = \frac{y_0(x_P/l)}{y_0(x_P/l=0,5)}$  от места приложения вынуждающей силы. Как показывают вычисления,  $\bar{y}_0 \approx \sin \pi(x_P/l)$ .

Диапазон значений  $\Delta\bar{\omega}_1$  и  $\bar{A}_2^a$

$x_T/l$	$\Delta\bar{\omega}_1, \%$	$\bar{A}_2^a, \%$
0,10	-0,16	72...607
0,25	-0,83	367...711
0,50	-1,64	632...813

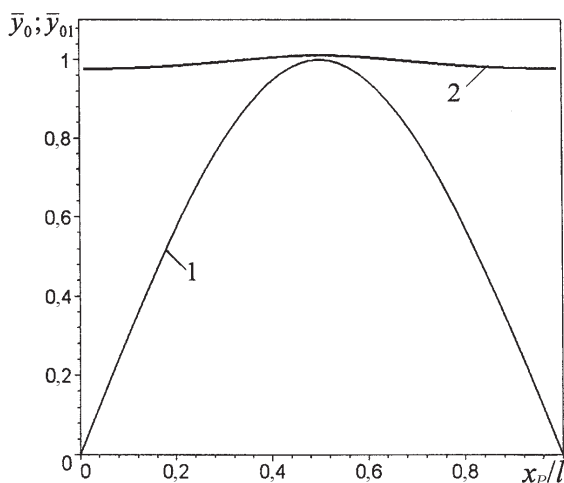


Рис. 7. Зависимость относительной величины амплитуды максимального прогиба  $\bar{y}_0$  (кривая 1) и  $\bar{y}_{01}$  (кривая 2) от места приложения вынуждающей силы.

Заметим, что, как и для зависимостей  $\alpha(x_P/l)$ , экстремум зависимости  $\bar{A}_2^a(x_P/l)$  близок к месту расположения трещины. Было также показано, что в случае рассматриваемого стержня для выявления местоположения трещины можно ограничиться определением трех относительных величин параметра  $\bar{A}_2^a$ , например его значениями при  $x_P/l = 0,25; 0,5; 0,75$ , отнесенных к значению при  $x_P/l = 0,5$ . На рис. 8 представлены соответствующие им зависимости, полученные с использованием формул (29), (30) при  $N = 9$  для трех случаев местоположения трещины  $x_T/l = 0,1; 0,25$  и  $0,5$ . Из анализа этих зависимостей

следует, что нарушение их симметрии свидетельствует об отклонении расположения трещины от середины стержня, и чем больше асимметрия, тем больше отклонение. При этом отношение  $\frac{\bar{A}_2^a(x_P = 0,75l; x_T)}{\bar{A}_2^a(x_P = 0,25l; x_T)} \cdot 0,5 \approx x_T/l$ .

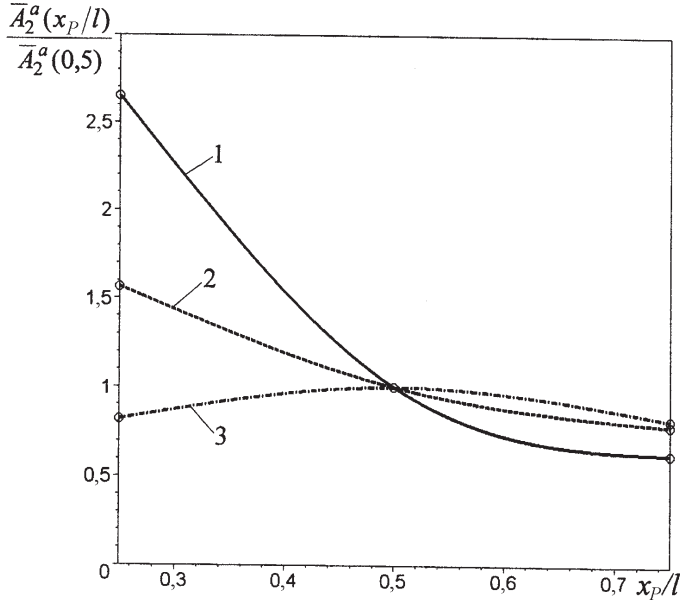


Рис. 8. Зависимости отношения  $\frac{\bar{A}_2^a(x_P/l)}{\bar{A}_2^a(0,5)}$  от относительной координаты приложения вынуждающей силы  $x_P/l$ , полученные по данным расчета при  $x_P/l = 0,25; 0,5$  и  $0,75$ , для различных случаев местоположения трещины: 1 –  $x_T/l = 0$ ; 2 –  $x_T/l = 0,25$ ; 3 –  $x_T/l = 0,5$ .

**Апробация методики.** Для проверки достоверности предложенного приближенного расчета вибродиагностического параметра наличия закрывающейся трещины полученные результаты сопоставляли с данными численного решения при учете различия между собственными формами колебаний упругого тела на полуциклах открытой и закрытой трещины. На рис. 6 точками показаны данные, полученные с использованием конечноэлементной модели шарнирно-опертого стержня с трещиной при тех же значениях отношения  $h/l$  и  $\gamma$  и метода Рунге-Кутты для численного решения системы дифференциальных уравнений вынужденных колебаний [14]. Как видно, результаты приближенного расчета неплохо согласуются с данными численного решения.

Как отмечалось при анализе работы [6], представленная зависимость параметра нелинейности колебаний от места приложения силы обнаруживается при учете различия между обобщенной силой и вектором работы вынуждающей силы на перемещениях исследуемой резонирующей формы колебаний при открытой и закрытой трещине. Для иллюстрации значимости этого на рис. 6 представлены полученные в [14] зависимости  $\bar{A}_2^a(x_P/l)$  для случая местоположения трещины в сечении  $x_T = 0,25l$  (кривая 2) при учете ( $\square$ ) и без учета ( $+$ ) отмеченного различия в обобщенной силе. Там же при-

ведены полученные соответствующие приближенные зависимости  $\bar{A}_2^a(x_p/l)$  (горизонтальные штрихпунктирные линии) в случае определения характеристики поврежденности  $\kappa$  по формуле (28), учитывающей только резонирующую первую форму колебаний.

Заметим, что при численном решении относительная амплитуда ускорения  $\bar{A}_2^a$  вычислялась в сечении  $x = 0,5l$  по данным спектрального анализа колебательного процесса, получаемого из решения системы дифференциальных уравнений, по резонируемой главной координате, в данном случае первой. Этим, по-видимому, объясняется отмечаемая в [14] практическая независимость при супергармоническом резонансе параметра нелинейности колебаний от места их регистрации. При экспериментальном исследовании нелинейности колебательного процесса ее основной параметр  $\bar{A}_2^a = A_2^a/A_1^a$  будет определяться не только амплитудами второй и первой гармоник резонирующей формы колебаний в рассматриваемом сечении упругого тела, но и амплитудами первой гармоники других возбуждаемых форм колебаний, т.е.

$A_1 = \sum_{i=1}^N A_{1i}$ . Однако их влияние в данном случае незначительное, что следует

из представленной на рис. 7 зависимости отношения  $(\bar{y}_{01})$  амплитуды максимального суммарного прогиба  $y_0 = \sum_{i=1}^9 y_i(x = 0,5l)$  к максимальному прогибу

первой формы колебаний  $y_1(x = 0,5l)$  от места приложения вынуждающей силы. Как видно,  $\bar{y}_{01} \approx 1$ .

## Выводы

1. Предложен метод приближенного аналитического определения вибродиагностического параметра наличия закрывающейся трещины при вынужденных колебаниях упругой системы с распределенными параметрами в области супер- и субгармонических резонансов, исключаяющий необходимость учета различия в формах колебаний при закрытой и открытой трещине и решения системы нелинейных дифференциальных уравнений.

2. На примере исследования вынужденных изгибных колебаний призматического стержня на двух опорах с закрывающейся трещиной, возбуждаемых сосредоточенной поперечной гармонической силой, в области супергармонического резонанса 2-го порядка основной формы колебаний показана достаточная для практики достоверность в определении параметра нелинейности колебательного процесса и выявлении его зависимости от места приложения вынуждающей силы, размера и местоположения трещины.

## Резюме

Розглянуто наближений метод розрахунку вібродіагностичного параметра наявності тріщини у пружній системі з розподіленими параметрами при супер- і субгармонійному резонансах. Метод базується на установленні від-

повідної характеристики нелінійності пружної системи на основі аналізу її вимушених коливань у непошкодженому стані і використанні результатів наближеного аналітичного визначення параметрів нелінійності коливань пружного тіла з тріщиною, що закривається, модельованого системою з одним ступенем вільності з асиметричною білінійною характеристикою відновлювальної сили, при вказаних резонансах.

1. *Плахтиенко Н. П., Ясинский С. А.* О резонансе второго порядка при колебаниях балки, содержащей поперечную трещину // Пробл. прочности. – 1995. – № 3. – С. 56 – 63.
2. *Плахтиенко Н. П.* Резонанс второго порядка пластины, содержащей протяженные дефекты целостности // Там же. – 2001. – № 1. – С. 105 – 116.
3. *Krawczuk M.* Coupled longitudinal and bending forced vibration of Timoshenko cantilever beam with a closing crack // J. Theoret. Appl. Mech. – 1994. – 2 (No. 32). – P. 463 – 482.
4. *Ruotolo R., Surace C., Crespo P., and Storer D.* Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack // Comp. Struct. – 1996. – 61, No. 6. – P. 1057 – 1074.
5. *Prime M. B. and Shevitz D. V.* Linear and non-linear method for detecting cracks in beam // Proc. of the 14th IMAC. – Dearborn (Michigan). – 1996. – 2. – P. 1437 – 1443.
6. *Bovsunovskii A. P., Surace C., and Bovsunovskii O. A.* The effect of damping and force application point on the non-linear dynamic behavior of a cracked beam at sub- and super-resonance vibrations // Пробл. прочности. – 2006. – № 5. – С. 61 – 67.
7. *Bovsunovsky A. and Bovsunovsky O.* Crack detection in beams by means of the driving force parameters variation at non-linear resonance vibrations // Key Eng. Mater. – 2007. – 347. – P. 413 – 420.
8. *Бовсуновський О. А.* Діагностика тріщин в стрижнях на основі нелінійних резонансів при варіюванні асиметрії змушувальної сили // Вісник НТУУ “КПІ”. Приладобудування. – 2008. – № 35. – С. 97 – 103.
9. *Бовсуновский О. А.* Конечноэлементная модель для исследования колебаний стержня с закрывающейся трещиной // Пробл. прочности. – 2008. – № 5. – С. 114 – 120.
10. *Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М.* Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // Дефектоскопия. – 1985. – № 3. – С. 77 – 82.
11. *Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I.* Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // J. Sound Vibr. – 1998. – 213, No. 1. – P. 159 – 168.
12. *Цыфанский С. Л., Бересневич В. И., Магоне М. А.* Вибродиагностика усталостных трещин в несущих поверхностях летательных аппаратов на основе использования нелинейных эффектов // Дефектоскопия. – 1993. – № 2. – С. 87 – 94.

13. *Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I.* Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings // *J. Sound Vibr.* – 2000. – **236**, No. 1. – P. 49 – 60.
14. *Бовсуновский О. А.* Нелінійні ефекти при вимушених коливаннях стрижнів з тріщиною: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Київ, 2008. – 20 с.
15. *Матвеев В. В.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 1. Существующие и предлагаемый методы решения // *Пробл. прочности.* – 2004. – № 4. – С. 5 – 20.
16. *Матвеев В. В.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 2. Определение диагностических параметров при основном и супергармоническом резонансе 2-го порядка // Там же. – № 5. – С. 5 – 22.
17. *Матвеев В. В., Бовсуновский О. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров упругого тела с трещиной при субгармоническом резонансе. Сообщ. 1. Слабый резонанс // Там же. – 2008. – № 2. – С. 26 – 40.
18. *Матвеев В. В., Бовсуновский О. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров упругого тела с трещиной при субгармоническом резонансе. Сообщ. 2. Сильный резонанс // Там же. – № 3. – С. 5 – 16.
19. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров наличия трещины в упругом теле при супергармоническом резонансе // Там же. – 2010. – № 4. – С. 5 – 19.
20. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Там же. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
21. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 2. Изгибные колебания. Аналитическое решение // Там же. – 1998. – № 6. – С. 9 – 22.
22. *Писаренко Г. С.* Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале / Предисловие Н. Н. Боголюбова. – Киев: Изд-во АН УССР, 1955. – 239 с.
23. *Писаренко Г. С.* Рассеяние энергии при механических колебаниях. – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – 276 с.
24. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 4. Анализ искажения гармоничности цикла колебаний стержневых элементов при наличии закрывающихся поперечных трещин // *Пробл. прочности.* – 2000. – № 1. – С. 5 – 12.

25. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщ. 1. Методика определения параметров повреждения // Там же. – 2004. – № 6. – С. 5 – 16.
26. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 3. Аналитическое и численное определение собственных частот продольных и изгибных колебаний стержней с поперечными трещинами // Там же. – 1999. – № 4. – С. 19 – 31.
27. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщ. 2. Прямолинейные трещины постоянной глубины // Там же. – 2005. – № 1. – С. 43 – 59.
28. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщ. 3. Сквозные и поверхностные полуэллиптические трещины // Там же. – 2006. – № 5. – С. 27 – 47.
29. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
30. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле / Под ред. Э. И. Григолока. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.

Поступила 30. 06. 2009