

ПРОБЛЕМЫ ПРОЧНОСТИ

*Международный
научно-технический журнал
Основан в июле 1969 г.
№ 1 (355) — 2002 г.*

Учредители: Национальная академия наук Украины
Институт проблем прочности НАН Украины
(Регистрационное свидетельство серия КВ № 129 от 07. 10. 1993 г.)

Издатель Институт проблем прочности НАН Украины

Редакционная коллегия:

В. Т. Трошенко (главный редактор), **В. А. Борисенко**, **Б. А. Грязнов**,
А. Л. Квитка, **В. Н. Киселевский**, **Б. И. Ковальчук**, **Л. В. Кравчук**,
А. Я. Красовский, **В. В. Кривенюк**, **А. А. Лебедев**, **В. В. Матвеев**,
В. П. Науменко, **Г. В. Степанов**, **В. А. Стрижало** (зам. главного
редактора), **В. К. Харченко** (зам. главного редактора), **А. П. Яковлев**

Редакционный совет:

М. Билы (Словакия), **В. И. Ковпак** (Украина), **С. Коцаньда**
(Польша), **Н. А. Махутов** (Россия), **К. Миллер** (Великобритания),
Я. Немец (Чехия), **Г. Плювинаж** (Франция), **Л. Тот** (Венгрия),
Д. Франсуа (Франция), **К. В. Фролов** (Россия)

Редакция журнала «Проблемы прочности»:

В. В. Науменко (зав. редакцией)
Л. Б. Дедух (редактор)
Н. М. Шинкаренко (оператор)

*Адрес редакции: 01014, Киев – 14, ул. Тимирязевская, 2
Институт проблем прочности НАН Украины*

Телефон: (044) 296 5657

Факс: (044) 296 1684

E-mail: <postmaster@ipp.adam.kiev.ua>

*Журнал переводится на английский язык и издается в США с
1969 г. издательством Kluwer Academic/Plenum Publishers под
названием «Strength of Materials»*



PROBLEMS of STRENGTH

*International
scientific & technical journal*

founded in July 1969

No. 1 (355) — 2002

**Founders: National Academy of Sciences of Ukraine
Institute of Problems of Strength, Nat. Ac. Sci. of Ukraine**

Publisher: Institute of Problems of Strength, Nat. Ac. Sci. of Ukraine

Editorial board:

**V. T. Troshchenko (editor-in-chief), V. A. Borisenko, B. A. Gryaznov,
V. K. Kharchenko (associate editor), V. N. Kisilevskii, B. I. Koval'chuk,
A. Ya. Krasovskii, L. V. Kravchuk, V. V. Krivenyuk, A. L. Kvitka,
A. A. Lebedev, V. V. Matveev, V. P. Naumenko, G. V. Stepanov, V. A.
Strizhalo (associate editor), A. P. Yakovlev**

Advisory board:

**M. Bily (Slovakia), D. Francois (France), K. V. Frolov (Russia), S.
Kosanda (Poland), V. I. Kovpak (Ukraine), N. A. Makhutov (Russia),
K. Miller (UK), Ya. Němec (Czech Republik), G. Pluinage (France),
L. Toth (Hungary)**

Editorial staff:

V. V. Naumenko, L. B. Dedukh, N. M. Shinkarenko

*Address: Institute of Problems of Strength
2, Timiryazevskaya str., Kiev, 01014, Ukraine*

Telephone: (044) 296 5657

Fax: (044) 296 1684

E-mail: <postmaster@ipp.adam.kiev.ua>

*Since 1969 the Journal has been translated into English and
published in the USA by Kluwer Academic/Plenum Publishers
under the title **Strength of Materials***

© Institute of Problems of Strength, Nat. Ac. Sci. of Ukraine, 2002

Содержание

Научно-технический раздел

МАРГОЛИН Б. З., ШВЕЦОВА В. А., ГУЛЕНКО А. Г., ИЛЬИН А. В., НИКОЛАЕВ В. А., СМИРНОВ В. И. Прогнозирование трещиностойкости корпусной реакторной стали на основе концепции “Master curve” и вероятностной модели	5
ОРЫНЯК И. В., ГИЕНКО А. Ю. Эллиптическая трещина нормального отрыва в бесконечном упругом теле. Сообщение 1. Перемещение берегов трещины при полиномиальном законе нагружения	22
БАЛЛЕСТЕРОС А., СТРИЖАЛО В. А., ГРИНИК Э. У., НОВОГРУДСКИЙ Л. С., ЧИРКО Л. И., ЗЕМЦОВ М. П. Определение эталонной температуры T_0 для стали JRQ и построение “Master curve” (на англ. яз.)	41
БОВСУНОВСКИЙ А. П., МАТВЕЕВ В. В. Вибрационные характеристики усталостного повреждения стержневых элементов конструкций	52
ДОЛГОВ Н. А., ЛЯШЕНКО Б. А. Влияние коэффициента Пуассона на предельное напряженное состояние покрытия	71
РОМАЩЕНКО В. А., СТОРОЖУК В. Н. Аналитический расчет сильного формоизменения первоначально эллиптических пластин	78
ПИНЯК И. С. Микро- и макроскорость роста усталостной трещины в сталях и сплавах под влиянием закрытия трещины	88
ГАЛИЕВ Ш. У., ПАНОВА О. П. Локализация резонансных сферических волн (на англ. яз.)	102
ГОФМАН М. Н., КОСМОДАМИАНСКИЙ А. С. К определению напряженного состояния кольцевой ортотропной пластинки	112
САФРОНОВ А. В., САФРОНОВ В. А. Итерационный метод оценки критической скорости флаттера аэродинамического профиля в нестационарном потоке	121
УЛИТИН Г. М. Устойчивость колонны буровой установки роторного типа	130

Производственный раздел

ГОЛУБЕВ В. К., МЕДВЕДКИН В. А. О динамическом разрезании кожухов обтекателей боевых частей из алюминиевого сплава АМг6	136
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Краткие сообщения

БОРОДАЧЕВ Н. М., САВЧЕНКО Н. И. Вариационный принцип для температурной задачи теории упругости в напряжениях	141
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Хроника, информация, реклама

СТЕПАНОВ Г. В., ХАРЧЕНКО В. В., БАБУЦКИЙ А. И., ЗИНЧЕНКО О. Я., ФЕОФЕНТОВ Н. А., РОМАНОВ С. В. Оценка термоциклического нагружения в узле приварки “горячего” коллектора к патрубку парогенератора ПГВ-1000	146
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Утвержден к печати ученым советом ИПП НАН Украины.

*Номер подготовлен, набран и сверстан в редакции ИПП НАН Украины.
Отпечатан в АО “ВИПОЛ”, Вольнская, 60. Заказ № 1-3506.*

Подп. к печати и в свет 11. 01. 2002. Тираж 400 экз. Цена договорная.

Contents

Scientific and Technical Section

MARGOLIN B. Z., SHVETSOVA V. A., GULENKO A. G., IL'IN A. V., NIKOLAEV V. A., and SMIRNOV V. I. Prediction of Fracture Toughness of Reactor Pressure-Vessel Steels on the Basis of the "Master Curve" Approach and Probabilistic Model	5
ORYNYAK I. V. and GIENKO A. Yu. An Elliptic Mode-I Crack in an Infinite Body. Part 1. Crack Opening Displacement under the Polynomial Law of Loading	22
BALLESTEROS A., STRIZHALO V. A., GRINIK Ё. U., NOVOGRUDSKII L. S., CHIRKO L. I., and ZEMTSOV M. P. Determination of Reference Temperature T_0 for Steel JRQ in an Unirradiated State and Construction of Master Curve	41
BOVSUNOVSKII A. P. and MATVEEV V. V. Dynamic Characteristics of a Fatigue Crack in Bar Elements of Structures	52
DOLGOV N. A. and LYASHENKO B. A. Effect of the Poisson's Ratio on the Ultimate Stress State of a Coating	71
ROMASHCHENKO V. A. and STOROZHUK V. N. Analytical Calculation of Strong Deformation of Initially Elliptical Plates	78
PINYAK I. S. Micro- and Macrorates of Fatigue Crack Propagation in Steels and Alloys under the Influence of Crack Closure	88
GALIEV Sh. U. and PANOVA O. P. Localization of Resonant Spherical Waves	102
GOFMAN M. N. and KOSMODAMIANSKII A. S. To the Problem of Determination of the Stress State of a Ring-Shaped Orthotropic Plate	112
SAFRONOV A. V. and SAFRONOV V. A. Iteration Method for the Evaluation of the Critical Rate of Airfoil Flutter in a Non-Stationary Flow	121
ULITIN G. M. Stability of a Drill Column of a Rotary-Type Drilling Rig	130

Production Section

GOLUBEV V. K. and MEDVEDKIN V. A. On Dynamic Cutting of Warhead Fairing Shells Made of AMg6 Aluminum Alloy	136
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

Brief Communications

BORODACHEV N. M. and SAVCHENKO N. I. Variational Principle for the Temperature Problem of the Theory of Elasticity in Stresses	141
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

News Items, Information, and Advertisement

STEPANOV G. V., KHARCHENKO V. V., BABUTSKII A. I., ZINCHENKO O. Ya., FEOFENTOV N. A., and ROMANOV S.V. Evaluation of Thermal and Cyclic Loading in the Welding Node of the "Hot" Collector with a Branch Pipe of PGV-1000 Steam-Generator	146
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.4

Прогнозирование трещиностойкости корпусной реакторной стали на основе концепции “Master curve” и вероятностной модели

Б. З. Марголин, В. А. Швецова, А. Г. Гуленко, А. В. Ильин, В. А. Николаев, В. И. Смирнов

ЦНИИ КМ “Прометей”, Санкт-Петербург, Россия

На основе вероятностной модели и “Master curve”-подхода выполнено прогнозирование температурной зависимости трещиностойкости при хрупком разрушении корпусной реакторной стали 15Х2НМФА в исходном и сильно охрупченном состоянии по результатам испытаний образцов типа Шарпи с трещиной на трещиностойкость при некоторой одной температуре. Сопоставление кривых $K_{Ic}(T)$ для стали в исходном состоянии, рассчитанных на основе вероятностной модели и “Master curve”-подхода, показало их хорошее соответствие. При испытании компактных образцов 2Т-СТ из стали в охрупченном состоянии в широком диапазоне температур получены экспериментальные значения трещиностойкости, которые сопоставляли с расчетными кривыми $K_{Ic}(T)$. Показано, что для охрупченной стали кривая $K_{Ic}(T)$, рассчитанная согласно “Master curve”-подходу, не описывает экспериментальные результаты адекватно, в то время как соответствие между экспериментальными данными по трещиностойкости и кривыми $K_{Ic}(T)$, рассчитанными по вероятностной модели, хорошее.

Ключевые слова: вероятностная модель, “Master curve”-подход, трещиностойкость, хрупкое разрушение, охрупченное состояние.

Введение. Температурная зависимость трещиностойкости $K_{Ic}(T)$ при хрупком разрушении корпусных реакторных сталей в исходном состоянии может прогнозироваться, по крайней мере, двумя способами: на основе концепции “Master curve” [1–4] и с помощью моделей, базирующихся на локальных критериях хрупкого разрушения [5–10]. Кроме того, трещиностойкость стали в исходном состоянии может быть определена экспериментально в широком диапазоне температур при испытании полномасштабных образцов.

Для облученных реакторных сталей наблюдается иная картина: могут быть испытаны только малоразмерные образцы, причем испытания на трещиностойкость возможны в ограниченном диапазоне температур, при которых уровень трещиностойкости невелик.

В настоящее время для прогнозирования кривых $K_{Ic}(T)$ по данным испытаний малоразмерных образцов широко используется концепция “Master curve”. Применимость этой концепции для корпусных сталей в различных

состояниях подтверждена экспериментально в [4]. Концепция “Master curve” основывается на условии горизонтального сдвига кривых $K_{Ic}(T)$, поэтому при анализе ее применимости для сильно охрупченных сталей возникает вопрос, является ли форма кривой $K_{Ic}(T)$ для охрупченной стали такой же, как для стали в исходном состоянии.

Имеется не так много данных по трещиностойкости облученных сталей со значительным охрупчиванием, которые позволили бы ответить на этот вопрос однозначно. В [11–13] было показано, что наклон кривых $K_{Ic}(T)$ для корпусных реакторных сталей в облученном состоянии уменьшается по сравнению с наклоном для сталей в исходном состоянии. На возможное изменение формы кривых $K_{Ic}(T)$ для охрупченных сталей указывают также некоторые косвенные факты, например изменение формы температурных кривых ударной вязкости для облученных сталей по сравнению с таковой для необлученных [12, 13]. Моделирование радиационного охрупчивания корпусных реакторных сталей [14] показало, что для сталей в сильно охрупченном состоянии изменятся форма кривых $K_{Ic}(T)$.

Прогнозирование трещиностойкости на основе локальных критериев разрушения может быть выполнено при использовании моделей [5–10]. Наиболее известными являются RKR-модель [6, 7] и модель Беремина [8]. Вместе с тем в работах [4, 14] было показано, что прогнозирование трещиностойкости для облученных корпусных реакторных сталей на основе моделей [6–8] является некорректным. Согласно этим моделям [6–8], зависимость $K_{Ic}(T)$ определяется температурной зависимостью предела текучести $\sigma_Y(T)$. Для корпусных сталей в температурном диапазоне $20 \leq T \leq 300^\circ\text{C}$ предел текучести изменяется очень слабо. Поэтому для стали с высоким значением переходной температуры, например для облученной стали, увеличение K_{Ic} с температурой будет очень небольшим, что противоречит экспериментальным данным [4, 13].

Разработана также модель прогнозирования трещиностойкости, основанная на новом локальном критерии хрупкого разрушения [9, 15] в детерминистической [9, 16] и вероятностной постановках [10]. Вероятностная модель верифицирована применительно к корпусным сталям в исходном состоянии [10, 14]. Эта модель, не содержащая каких-либо предположений относительно формы кривой $K_{Ic}(T)$ и не использующая условие горизонтального сдвига этих кривых, обеспечивает их прогнозирование при сдвиге и изменении формы.

Основные задачи настоящего исследования – сравнение кривых $K_{Ic}(T)$, рассчитанных по вероятностной модели [10] и “Master curve”-подходу, для стали 15X2НМФА в исходном состоянии и верификация указанных подходов для этой стали в сильно охрупченном состоянии. Расчет кривых $K_{Ic}(T)$ по обоим подходам был выполнен на основе результатов испытаний на трещиностойкость при одной температуре образцов типа Шарпи с трещиной. Верификация подходов проведена путем сопоставления расчетных кривых $K_{Ic}(T)$ с экспериментальными значениями трещиностойкости для компактных образцов 2Т-СТ в широком диапазоне температур.

1. Прогнозирование кривой $K_{Ic}(T)$ на основе вероятностной модели.

1.1. *Локальный критерий хрупкого разрушения.* Формулировка локального критерия хрупкого разрушения в вероятностной постановке включает такие положения.

1). Поликристаллический материал представляется как совокупность элементарных ячеек со следующими свойствами. Механические свойства ячейки принимаются идентичными осредненным механическим свойствам материала, полученным на стандартных образцах. Размер элементарной ячейки ρ_{uc} равен среднему размеру зерна поликристаллического материала. Напряженно-деформированное состояние (НДС) в элементарной ячейке считается однородным.

2). Для ячейки принят локальный критерий хрупкого разрушения в виде [9, 15]

$$\sigma_1 + m_{T\varepsilon} \sigma_{eff} \geq \sigma_d; \quad (1a)$$

$$\sigma_1 \geq S_c(\kappa). \quad (16)$$

Здесь $S_c(\kappa)$ – критическое напряжение хрупкого разрушения,

$$S_c(\kappa) = [C_1^* + C_2^* \exp(-A_d \kappa)]^{-1/2}, \quad (2)$$

где σ_1 – максимальное главное напряжение; эффективное напряжение $\sigma_{eff} = \sigma_{eq} - \sigma_Y$; σ_{eq} – интенсивность напряжений; $\kappa = \int d\varepsilon_{eq}^p$ – параметр Одквиста; $d\varepsilon_{eq}^p$ – приращение эквивалентной пластической деформации; C_1^* , C_2^* , A_d – константы материала; σ_d – эффективная прочность карбидов или границ соединений карбид–матрица либо других частиц, на которых зарождаются микротрещины скола; $m_{T\varepsilon}$ – параметр, который зависит от температуры T и пластической деформации и может быть записан как [10, 15]

$$m_{T\varepsilon} = m_T(T) m_\varepsilon(\kappa); \quad (3)$$

$$m_\varepsilon(\kappa) = S_0 / S_c(\kappa); \quad (4)$$

$$m_T(T) = m_0 \sigma_{Ys}(T) \quad (5)$$

($S_0 \equiv S_c(\kappa = 0)$; m_0 – константа, определяемая экспериментально; σ_{Ys} – температурно-зависимая компонента предела текучести).

3). Для формулировки критерия (1) в вероятностной постановке принимается, что параметр σ_d является стохастическим, остальные параметры – детерминистическими.

4). Для описания функции распределения карбидов по прочности, т.е. функции распределения параметра σ_d , используется распределение Вейбулла [17]:

$$p(\sigma_d) = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma_d - \sigma_{d0}}{\tilde{\sigma}_d} \right)^\eta \right], \quad (6)$$

где $p(\sigma_d)$ – вероятность того, что минимальная прочность карбида в элементарной ячейке меньше, чем σ_d ; $\tilde{\sigma}_d$, σ_{d0} и η – параметры Вейбулла.

5). Для описания хрупкого разрушения поликристаллического материала используется модель наислабейшего звена.

6). Принимается, что хрупкое разрушение может происходить только в тех ячейках, для которых выполняется условие $\sigma_{eq} \geq \sigma_Y$.

7). Вероятность неразрушения элементарной ячейки равна единице, если для нее выполняется условие $\sigma_1 < S_c(\kappa)$.

1.2. *Вероятностная модель прогнозирования кривой $K_{Ic}(T)$* . Вероятностная модель прогнозирования трещиностойкости основана на следующих положениях.

1). Используется локальный критерий хрупкого разрушения в вероятностной постановке, рассмотренный выше.

2). Принимается, что хрупкое разрушение образца контролируется ячейками, расположенными в зоне у вершины трещины (рис. 1). Эта зона представляет собой полукруг с радиусом, равным $r_p + \delta/2$, где r_p – минимальный размер пластической зоны; δ – раскрытие вершины трещины. Условие $\sigma_{eq} \geq \sigma_Y$ выполняется автоматически для такой зоны.

3). Принимается, что все ячейки, расположенные в одном и том же полукольце, имеют одинаковую вероятность хрупкого разрушения.

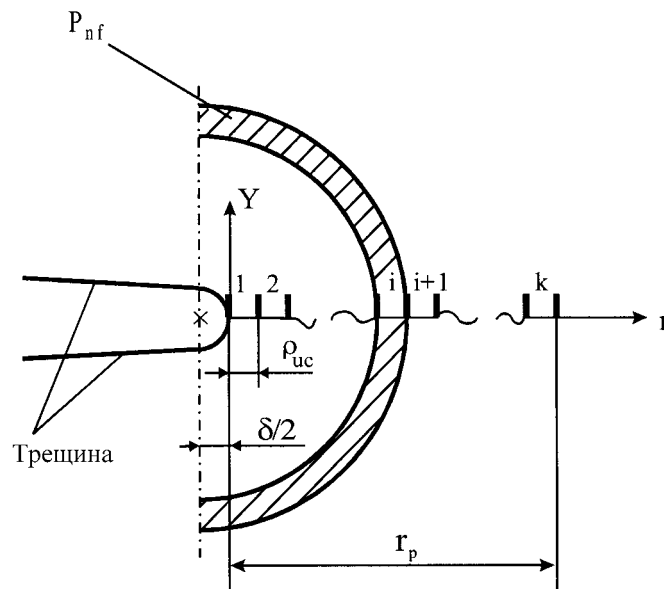


Рис. 1. Зона у вершины трещины, выбранная для расчета вероятности хрупкого разрушения образца с трещиной: $P_{nf} = \exp \left[- \omega \pi \left(\frac{\delta}{2\rho_{uc}} + i - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sigma_{nuc}^i - \sigma_{d0}}{\tilde{\sigma}_d} \right)^\eta \right]$.

4). Напряженно-деформированное состояние у вершины трещины на линии продолжения трещины рассчитывается согласно приближенному аналитическому решению [10].

На основе этих положений вероятность хрупкого разрушения образца с трещиной вычисляется как

$$P_f(K_I)|_T = 1 - \exp \left[- \frac{\omega}{(\tilde{\sigma}_d)^\eta} \pi \sum_{i=1}^k \left(\frac{\delta}{2\rho_{uc}} + i - \frac{1}{2} \right) (\sigma_{nuc}^i - \sigma_{d0})^\eta \right], \quad (7)$$

где $P_f(K_I)|_T$ – вероятность хрупкого разрушения как функция коэффициента интенсивности напряжений K_I при данной температуре; k – число элементарных ячеек на линии продолжения трещины в зоне, показанной на рис. 1, $k = r_p / \rho_{uc}$; ω – число элементарных ячеек, расположенных вдоль фронта трещины, $\omega = B / \rho_{uc}$; B – толщина образца; $\sigma_{nuc}^i \equiv \sigma_1^i + m_T m_\varepsilon(\kappa_i) \sigma_{eff}^i$; i – номер ячейки на линии продолжения трещины. В уравнении (7) элементарные ячейки, для которых выполняется условие $\sigma_1^i < S_c(\kappa_i)$ или $\sigma_{nuc}^i < \sigma_{d0}$, исключаются из анализа, и в (7) для них принимается $\sigma_{nuc}^i - \sigma_{d0} = 0$.

1.3. Методы экспериментального определения параметров, необходимых для прогнозирования трещиностойкости. Для аналитического описания кривой $K_{Ic}(T)$ в диапазоне температур хрупкого разрушения на основе предложенной модели следует знать параметры, входящие в локальный критерий хрупкого разрушения ($S_c(\kappa)$, $m_T(T)$, $\tilde{\sigma}_d$, σ_{d0} и η), а также кривую деформирования материала, которая необходима для расчета НДС. Эта кривая аппроксимируется уравнением

$$\sigma_{eq} = \sigma_Y + A_0(\kappa)^n, \quad (8)$$

где A_0 и n – константы материала. Температурная зависимость предела текучести $\sigma_Y(T)$ задается уравнением

$$\sigma_Y(T) = a - cT + b \exp(-hT), \quad (9)$$

где a , b , c , h – константы материала, не зависящие от температуры; T – температура в градусах Кельвина.

Для корпусных реакторных сталей аппроксимация зависимости $\sigma_Y(T)$ уравнением (9) при $c = 0$ описывает экспериментальные данные достаточно хорошо в области низких и умеренных (до 50°C) температур [10, 14], при $c \neq 0$ – в диапазоне как низких, так и повышенных (до 450°C).

Зависимость $S_c(\kappa)$ и коэффициенты в (8) и (9) определяются на основе результатов испытаний стандартных образцов на одноосное растяжение при различных температурах [15].

Параметр $m_T(T)$ рассчитывается по корреляционной зависимости (5). Процедура определения параметра m_0 рассмотрена в [10]. Температурно-зависимая компонента предела текучести $\sigma_{Ys}(T)$ задается как

$$\sigma_{Ys}(T) = \sigma_Y(T) - \sigma_{YG}, \quad (10)$$

где σ_{YG} – температурно-независимая компонента предела текучести. С достаточной степенью точности в качестве величины σ_{YG} может быть принято значение $\sigma_Y(T)$ при некоторой температуре T_{YG} , когда $\sigma_{Ys}(T_{YG}) < 0,01\sigma_Y(T_{YG})$. Тогда температурно-зависимая компонента предела текучести вычисляется как $\sigma_{Ys}(T) = \sigma_Y(T) - \sigma_Y(T_{YG})$. Для корпусных реакторных сталей температура T_{YG} может быть взята как $T_{YG} = 350^\circ\text{C}$ [10, 14].

Параметры $\tilde{\sigma}_d$ и η определяются по результатам испытаний на трещиностойкость малоразмерных образцов с трещиной при некоторой одной температуре.

Уравнение (7) удобно представить в виде [8]

$$P_f = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma_w}{\tilde{\sigma}_d}\right)^\eta\right], \quad (11)$$

где σ_w – напряжение Вейбулла,

$$\sigma_w = \left[\omega\pi \sum_{i=1}^k \left(\frac{\delta}{2\rho_{uc}} + i - \frac{1}{2} \right) (\sigma_{nuc}^i - \sigma_{d0})^\eta \right]^{1/\eta}. \quad (12)$$

В уравнении (12), так же как в (7), ячейки, для которых выполняется условие $\sigma_1^i < S_c(\kappa_i)$ или $\sigma_{nuc}^i < \sigma_{d0}$, исключаются из анализа, и в (12) для них принимается $\sigma_{nuc}^i - \sigma_{d0} = 0$.

Рассмотрим процедуру определения параметров $\tilde{\sigma}_d$ и η в предположении, что параметр m_0 известен. Если необходимо определить параметр m_0 , образцы испытываются при двух различных температурах и используется итерационный процесс [10].

1. Испытываются малоразмерные образцы, например образцы Шарпи с трещиной, на трещиностойкость при температуре T и определяются значения K_{Jc} .

2. Рассчитываются поля напряжений и деформаций для каждого малоразмерного образца с трещиной в соответствии с аналитическим решением [10].

3. Задается некоторое начальное значение параметра $\eta = \eta_0$.

4. Значения параметра σ_w рассчитываются для каждого испытанного образца с трещиной с использованием деформаций и напряжений, полученных согласно п. 2.

5. Параметры $\tilde{\sigma}_d$ и η в (12) определяются с помощью метода наибольшего правдоподобия [18].

6. Сравниваются значения η и η_0 :

если $\eta \cong \eta_0$, то итерационный процесс прерывается;

если $\eta \neq \eta_0$, то значение параметра η_0 корректируется, и процесс повторяется в соответствии с пп. 4–6.

Зависимость $P_f(\sigma_w)$, заданная уравнением (11) с полученными значениями параметров $\tilde{\sigma}_d$ и η , может быть сопоставлена с эмпирической зависимостью $P_f(\sigma_w)$, которая получена следующим образом: вероятность хрупкого разрушения P_{ff} для соответствующего значения σ_{wj} вычисляется как $P_{ff} = (j - 0,5)/N$, где j есть ранг испытаний, т.е. $j = 1$ для наименьшего и $j = N$ для наибольшего значений σ_{wj} ; N – количество испытанных образцов. Тогда для сравнения эмпирической и рассчитанной функций $P_f(\sigma_w)$ последние обычно представляют в координатах $\ln \ln(1 - P_f)^{-1}$ vs $\ln \sigma_w$.

Параметр σ_{d0} может быть оценен следующим образом. По физическому смыслу его можно интерпретировать как минимально возможное значение прочности карбидов. Это значение можно определить из условия зарождения микротрещин (1), если учесть, что микротрещины могут зародиться при $\sigma_{eq} = \sigma_Y$ при температуре, близкой к абсолютному нулю. Тогда, учитывая, что в этом случае $\sigma_{eff} = 0$ и $\sigma_1 \approx \sigma_Y$, из (1) имеем $\sigma_{d0} \approx \sigma_Y$ и из (9) – $\sigma_Y \approx a + b$, так что $\sigma_{d0} \approx a + b$.

Таким образом, для определения всех параметров вероятностной модели необходимо испытать стандартные гладкие цилиндрические образцы и малоразмерные образцы на трещиностойкость при какой-то одной температуре.

2. Прогнозирование трещиностойкости на основе концепции “Master curve”. Концепция “Master curve” базируется на следующих положениях [1–3].

1. Вероятность хрупкого разрушения P_f образца (выбранного произвольно из партии образцов) описывается трехпараметрическим уравнением Вейбулла [1]:

$$P_f = 1 - \exp \left[- \left(\frac{K_{Ic} - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}} \right)^4 \right], \quad (13)$$

где P_f – вероятность разрушения при $K_I \leq K_{Ic}$; K_0 – параметр масштаба, зависящий от температуры испытаний и толщины образца; K_{\min} – минимально возможная трещиностойкость. По данным [1–3], $K_{\min} = 20 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$.

2. Влияние толщины образца на трещиностойкость описывается уравнением [2]

$$\frac{K_{Ic}^X - K_{\min}}{K_{Ic}^Y - K_{\min}} = \left(\frac{B_Y}{B_X} \right)^{1/4}, \quad (14)$$

где K_{Ic}^X, K_{Ic}^Y – трещиностойкость образцов толщиной B_X и B_Y при одинаковой вероятности хрупкого разрушения P_f .

3. Медианное значение трещиностойкости (при $P_f = 0,5$) как функция температуры для образцов 1Т-СТ ($B = 25$ мм) задается уравнением [3]

$$K_{Ic}^0(\text{med})(T) = 30 + 70 \exp[0,019(T - T_0)], \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}, \quad (15)$$

где T_0 – температура, при которой $K_{Ic}^0(\text{med}) = 100 \text{ МПа}\sqrt{\text{м}}$.

Под величиной K_{Ic} в (13)–(15) следует понимать значение трещиностойкости, определенное как методами линейной (K_{Ic}), так и нелинейной (K_{Jc}) механики разрушения.

4. Принимается, что для охрупченных материалов, в частности для облученных, в уравнении (15) изменяется только один параметр – T_0 , остальные численные параметры не изменяются.

Последнее положение есть, по сути, концепция горизонтального сдвига.

Температурные зависимости трещиностойкости для образцов любой толщины при любой вероятности хрупкого разрушения могут быть рассчитаны с помощью уравнений (13)–(15).

3. Методы и результаты испытаний.

3.1. *Материал и образцы.* Объектом исследования служила корпусная реакторная сталь 15Х2НМФА для ВВЭР-1000 из обечайки толщиной 200 мм. Экспериментально исследовали сталь в исходном состоянии и охрупченном. Последнее было получено специальной термообработкой, имитирующей радиационное охрупчивание стали.

Степень охрупчивания оценивали по сдвигу критической температуры хрупкого разрушения, в качестве которой принимали температуру, соответствующую значению ударной вязкости 41 Дж (Дж). Для стали в исходном состоянии величина T_{41J} , определенная по температурным кривым ударной вязкости, составляла -64°C , для стали в охрупченном состоянии $T_{41J} = 116^\circ\text{C}$, так что $\Delta T_{41J} = 180^\circ\text{C}$.

Микроструктуру стали 15Х2НМФА в исходном и охрупченном состоянии изучали на оптическом микроскопе. Установлено, что микроструктура стали в обоих состояниях может быть охарактеризована как отпущенная бейнитно-мартенситная структура.

Стандартные компактные образцы толщиной $B = 50$ мм и шириной $W = 100$ мм (образцы 2Т-СТ) изготавливали с ориентацией L-S (это обозначение использовано согласно [19]). На образцах наносили боковые канавки глубиной 5 мм, т.е. их исходную толщину уменьшали на 20%.

На образцах Шарпи с трещиной толщиной 10 мм, которые также имели ориентацию L-S, наносили боковые канавки глубиной 1 мм.

Гладкие цилиндрические образцы диаметром 5 мм и с длиной рабочей части 25 мм были ориентированы так, что их поперечное сечение было параллельно поверхности разрушения компактных образцов.

3.2. *Испытания на растяжение гладких цилиндрических образцов и определение параметров $\sigma_Y(T)$, $S_c(\kappa)$, $A_0(T)$ и $n(T)$.* Гладкие цилиндрические образцы из стали в исходном состоянии испытывали в интервале температур $-196 \dots 350^\circ\text{C}$, из охрупченной стали – от -196 до 450°C при скорости деформирования около $5 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}$.

По результатам испытаний определяли коэффициенты в (2), (8) и (9).

При построении зависимости критического напряжения хрупкого разрушения S_c от пластической деформации (уравнение (2)) было получено:

для стали в исходном состоянии – $C_1^* = 2,01 \cdot 10^{-7}$ МПа⁻², $C_2^* = 3,90 \cdot 10^{-7}$ МПа⁻², $A_d = 1,71$;

в охрупченном состоянии – $C_1^* = 1,92 \cdot 10^{-7}$ МПа⁻², $C_2^* = 3,04 \cdot 10^{-7}$ МПа⁻², $A_d = 2,92$.

Константы A_0 и n (8) для кривой деформирования представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Параметры кривых деформирования для стали 15Х2НМФА в исходном (над чертой) и охрупченном (под чертой) состоянии при аппроксимации $\sigma_{eq} = \sigma_Y + A_0(\kappa)^n$

Параметр	$T, ^\circ\text{C}$								
	-196	-100	-60	-20	20	100	200	350	450
σ_Y , МПа	$\frac{1039}{1302}$	$\frac{731}{1020}$	$\frac{650}{966}$	$\frac{612}{938}$	$\frac{580}{900}$	$\frac{552}{898}$	$\frac{-}{865}$	$\frac{510}{889}$	$\frac{-}{846}$
	$\frac{679}{765}$	$\frac{685}{752}$	$\frac{622}{718}$	$\frac{629}{727}$	$\frac{590}{700}$	$\frac{557}{740}$	$\frac{-}{764}$	$\frac{537}{742}$	$\frac{-}{586}$
n	$\frac{0,499}{0,410}$	$\frac{0,470}{0,360}$	$\frac{0,460}{0,360}$	$\frac{0,490}{0,390}$	$\frac{0,490}{0,430}$	$\frac{0,490}{0,440}$	$\frac{-}{0,470}$	$\frac{0,500}{0,490}$	$\frac{-}{0,450}$

При построении зависимости $\sigma_Y(T)$ (9) константы материала составляют:

для стали в исходном состоянии – $a = 510$ МПа, $c = 0$, $b = 1083$ МПа, $h = 9,309 \cdot 10^{-3}$ К⁻¹;

в охрупченном состоянии – $a = 867$ МПа, $c = 0,0305$ МПа · К⁻¹, $b = 975$ МПа, $h = 1,04 \cdot 10^{-2}$ К⁻¹.

Учитывая, что согласно разделу 1.3 $\sigma_{d0} \approx a + b$, для стали в исходном состоянии получаем $\sigma_{d0} = 1593$ МПа, в охрупченном – $\sigma_{d0} = 1842$ МПа.

Фрактографические исследования поверхностей разрушения цилиндрических образцов, испытанных на растяжение при $T = -196^\circ\text{C}$, показали, что хрупкое разрушение охрупченной стали происходило в основном по механизму внутризеренного скола и микроскола, так же как и хрупкое разрушение стали в исходном состоянии.

3.3. *Испытания на трещиностойкость.* Предварительное циклическое нагружение и испытание на трещиностойкость образцов Шарпи с трещиной и образцов 2Т-СТ проводили в соответствии с требованиями ASTM E 1921 [3].

Образцы Шарпи с трещиной испытывали на трещиностойкость на испытательной машине УМЭ-100 кН, оборудованной термокриокамерой: для стали в исходном состоянии при $T = -110^\circ\text{C}$, для охрупченной стали – при $T = -196^\circ\text{C}$ и 30°C . Полученные значения трещиностойкости даны в табл. 2 и 3. При $T = -196^\circ\text{C}$ было испытано три образца, для которых получены следующие значения K_{Ic} : 20,4; 21,7 и 22,4 МПа $\sqrt{\text{м}}$.

Т а б л и ц а 2

Результаты испытаний на трещиностойкость при $T = -110^\circ\text{C}$ образцов Шарпи с трещиной из стали 15X2НМФА в исходном состоянии

№ образца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
K_{Jc} , МПа $\sqrt{\text{м}}$	69	79	105	112	115	117	123	128	147	173

Т а б л и ц а 3

Результаты испытаний на трещиностойкость при $T = 30^\circ\text{C}$ образцов Шарпи с трещиной из стали 15X2НМФА в охрупченном состоянии

№ образца	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
K_{Jc} , МПа $\sqrt{\text{м}}$	59	64	73	74	76	77	88	88	89	105	115	126	148	180

Испытания на трещиностойкость образцов 2Т-СТ проводили в температурном диапазоне $-50...150^\circ\text{C}$ на испытательной машине «Schenk-1000 kN». Полученные значения трещиностойкости для этих образцов приведены ниже.

Фрактографические исследования поверхностей разрушения образцов Шарпи с трещиной показали, что хрупкое разрушение охрупченной стали происходило в основном по механизму внутризеренного скола и микроскола.

4. Прогнозирование трещиностойкости исследуемой стали в исходном состоянии. В настоящем разделе представлены результаты прогнозирования кривых $K_{Ic}(T)$ для стали в исходном состоянии, полученные на основе концепции “Master curve” и вероятностной модели, и сопоставление этих кривых друг с другом. Параметр T_0 в “Master curve” и параметры $\tilde{\sigma}_d$ и η в вероятностной модели определяли по результатам испытаний образцов Шарпи с трещиной при $T = -110^\circ\text{C}$ (табл. 2).

4.1. *Прогнозирование трещиностойкости на основе концепции “Master curve”.* Параметр T_0 определяли однотемпературным методом [3] по данным табл. 2, при этом было получено $T_0 = -109,1^\circ\text{C}$.

Кривые $K_{Ic}(T)$, рассчитанные при $T_0 = -109,1^\circ\text{C}$ по уравнениям (13) и (15) для образца с трещиной толщиной $B = 25$ мм при $P_f = 0,05; 0,5$ и $0,95$, иллюстрирует рис. 2.

4.2. *Прогнозирование трещиностойкости на основе вероятностной модели.* Параметры для расчета кривых $K_{Ic}(T)$ на основе вероятностной модели определяли по результатам испытаний гладких цилиндрических образцов и образцов Шарпи с трещиной. Размер элементарной ячейки ρ_{uc} полагали равным $0,05$ мм [10]. Согласно [10], принимали $m_0 = 0,1$ МПа $^{-1}$ и согласно разделу 3.2 – $\sigma_{d0} = 1593$ МПа. Зависимость $m_T(T)$ вычисляли по уравнению $m_T(T) = m_0[\sigma_Y(T) - \sigma_Y(T = 350^\circ\text{C})]$.

Параметры $\tilde{\sigma}_d$ и η определяли в соответствии с процедурой, представленной в разделе 1.3, по данным табл. 2, при этом было получено $\tilde{\sigma}_d = 23243$ МПа, $\eta = 5,8$. Функция $P_f(\sigma_w)$, задаваемая уравнением (11), и эмпирическая функция приведены на рис. 3.

Зависимости $K_{Ic}(T)$, рассчитанные по вероятностной модели при $P_f = 0,05; 0,5$ и $0,95$, представлены на рис. 2 для образцов с трещиной толщиной $B = 25$ мм. Видно, что кривые $K_{Ic}(T)$, рассчитанные на основе вероятностной модели и концепции “Master curve”, весьма близки.

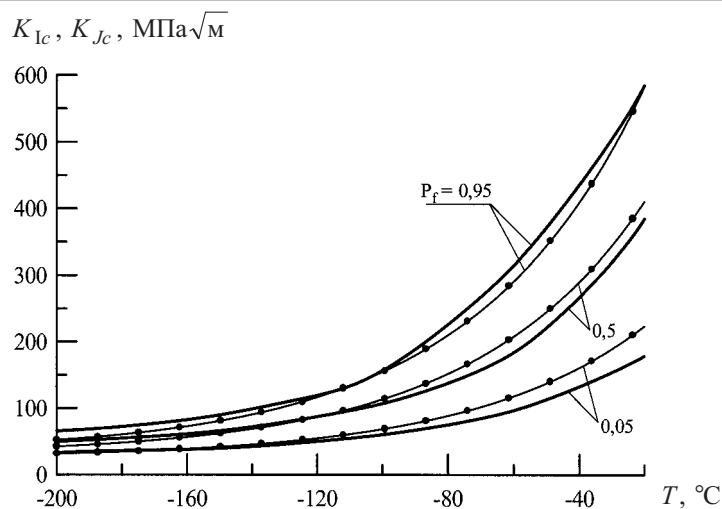


Рис. 2. Кривые $K_{Ic}(T)$, рассчитанные согласно концепции “Master curve” (кривые с точками) и вероятностной модели (сплошные линии) для образцов с трещиной толщиной $B = 25$ мм из стали 15X2NMФА в исходном состоянии при разной вероятности хрупкого разрушения.

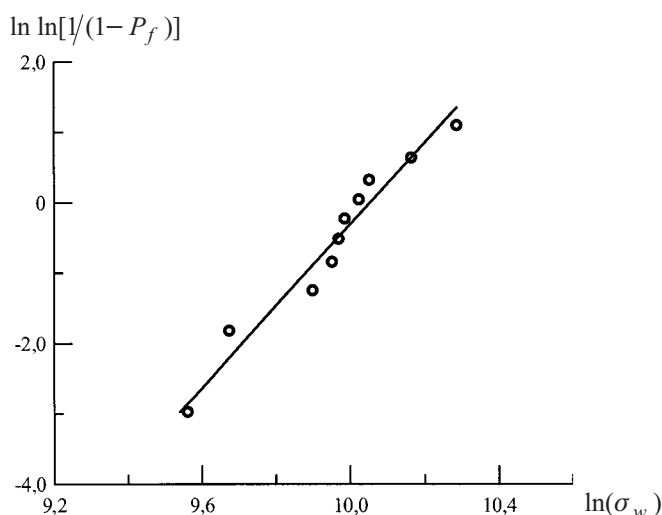


Рис. 3. Сопоставление расчетной (прямая) и эмпирической (точки) функций $P_f(\sigma_w)$ для образцов Шарпи с трещиной из стали 15X2NMФА в исходном состоянии.

5. Прогнозирование трещиностойкости исследуемой стали в охрупченном состоянии и сравнение с результатами экспериментов. В настоящем разделе представлены результаты прогнозирования кривых $K_{Ic}(T)$ для стали в охрупченном состоянии, полученные на основе концепции “Master curve” и вероятностной модели. Параметр T_0 в “Master curve” и параметры $\tilde{\sigma}_d$ и η в вероятностной модели определяли по данным испытаний образцов Шарпи с трещиной при $T = 30^\circ\text{C}$ (табл. 3). Расчетные кривые сопоставляли с экспериментальными значениями K_{Ic} , полученными при испытании образцов 2Т-СТ. Выполнена также аппроксимация экспериментальных значений экспоненциальным уравнением.

5.1. Прогнозирование трещиностойкости на основе концепции “Master curve”. Параметр T_0 определяли однотемпературным методом [3] по данным табл. 3, при этом получено $T_0 = 36,8^\circ\text{C}$.

С использованием полученного значения T_0 зависимости $K_{Ic}(T)$ рассчитывали согласно уравнениям (13)–(15) для образцов толщиной $B = 50$ мм при разной вероятности. Эти кривые представлены на рис. 4. Там же приведены результаты испытаний образцов 2Т-СТ в диапазоне температур $-50\dots150^\circ\text{C}$. Видно, что экспериментальные значения K_{Ic} при $T > 100^\circ\text{C}$ расположены значительно ниже расчетной кривой $K_{Ic}(T)$ при $P_f = 0,05$.

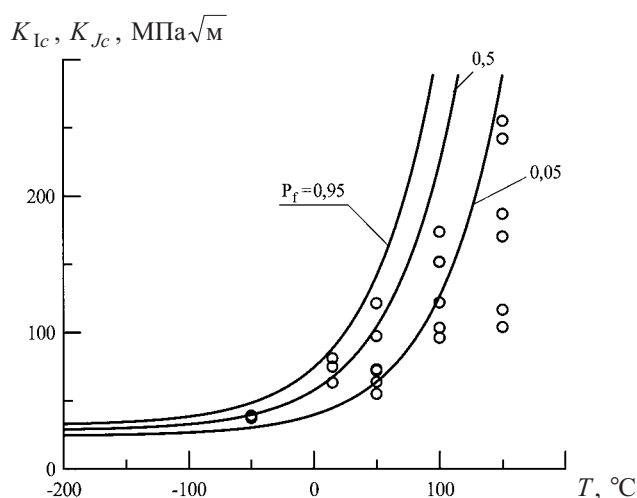


Рис. 4. Кривые $K_{Ic}(T)$, рассчитанные согласно концепции “Master curve” для образцов с трещиной толщиной $B = 50$ мм из стали 15Х2НМФА в охрупченном состоянии при разной вероятности хрупкого разрушения: точки – экспериментальные значения трещиностойкости для образцов 2Т-СТ с 20%-ными боковыми надрезами.

Расхождение экспериментальных значений трещиностойкости и расчетных кривых, полученных на основе концепции “Master curve”, по-видимому, связано с нарушением используемого в ней условия горизонтального сдвига, т.е. с изменением формы кривой $K_{Ic}(T)$ для охрупченной стали. В этой связи интересно определить реальную форму кривой $K_{Ic}(T)$ для исследуемой стали путем прямой аппроксимации экспериментальных значений K_{Ic} для образцов 2Т-СТ. Процедура такой обработки и полученные результаты представлены ниже.

5.2. Прямая аппроксимация экспериментальных значений K_{Ic} для образцов 2Т-СТ. Экспериментальные значения K_{Ic} для образцов 2Т-СТ были аппроксимированы экспоненциальным уравнением по следующей процедуре.

1. Используя значения K_{Ic} при $T = 50, 100$ и 150°C , с помощью однотемпературного метода вычислялись медианные значения трещиностойкости $K_{Ic(med)}$ при этих температурах.

2. Температурная зависимость медианных значений трещиностойкости $K_{Ic(med)}(T)$ для образцов толщиной $B = 50$ мм аппроксимировалась уравнением

$$K_{Ic(med)} = \alpha + \beta \exp(\gamma T), \quad (16)$$

где α принималось как среднее значение K_{Ic} при $T = -196^\circ\text{C}$; β и γ вычислялись методом наименьших квадратов с использованием значения $K_{Ic(med)}$ при $T = 50, 100$ и 150°C .

3. Температурная зависимость трещиностойкости для вероятности хрупкого разрушения $P_f = 0,05$ и $0,95$ рассчитывалась по уравнениям (13) и (16).

В этой процедуре использовалось первое положение концепции “Master curve” и предполагалось, что форма кривой $K_{Ic}(T)$ может отличаться от принятой для “Master curve”. Форма “Master curve”, как известно, задается параметром γ , который принимался равным $0,019$ независимо от состояния материала (см. уравнение (15)).

Получены следующие результаты обработки экспериментальных значений трещиностойкости для образцов 2Т-СТ по рассмотренной процедуре: при $T = 50^\circ\text{C}$ – $K_{Ic(med)} = 86,7$ МПа $\sqrt{\text{м}}$, при $T = 100^\circ\text{C}$ – $K_{Ic(med)} = 133,4$ МПа $\sqrt{\text{м}}$, при $T = 150^\circ\text{C}$ – $K_{Ic(med)} = 190,3$ МПа $\sqrt{\text{м}}$, $\alpha = 21,5$ МПа $\sqrt{\text{м}}$, $\beta = 43,4$ МПа $\sqrt{\text{м}}$ и $\gamma = 0,0091$ $1/^\circ\text{C}$.

Кривая $K_{Ic(med)}(T)$ и кривые $K_{Ic}(T)$ при $P_f = 0,05$ и $0,95$, рассчитанные согласно п. 3, представлены на рис. 5. Там же приведены экспериментальные значения K_{Ic} для образцов 2Т-СТ. Видно, что расчетные кривые $K_{Ic}(T)$ весьма хорошо соответствуют экспериментальным точкам.

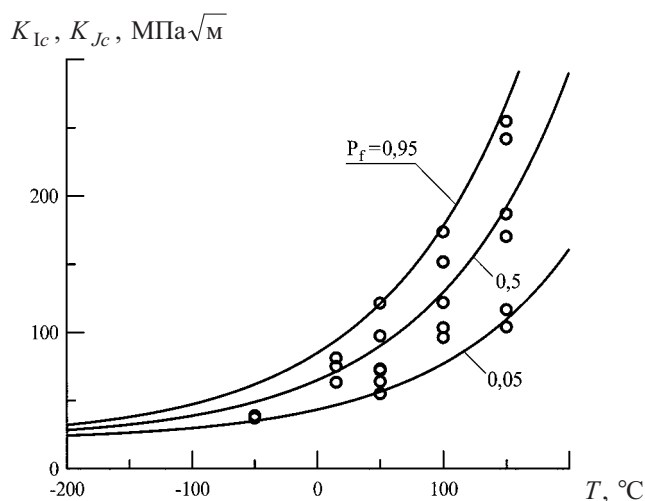


Рис. 5. Кривые $K_{Ic}(T)$, рассчитанные согласно уравнениям (13) и (16) при $\alpha = 21,5$ МПа $\sqrt{\text{м}}$, $\beta = 43,4$ МПа $\sqrt{\text{м}}$ и $\gamma = 0,0091$ $1/^\circ\text{C}$ для образцов с трещиной толщиной $B = 50$ мм из стали 15Х2НМФА в охрупченном состоянии при разной вероятности хрупкого разрушения: точки – экспериментальные значения трещиностойкости для образцов 2Т-СТ с 20%-ными боковыми надрезами.

Таким образом, для реальной кривой $K_{Ic}(T)$ имеем $\gamma = 0,0091$ вместо значения $\gamma = 0,019$, принятого для “Master curve”. Параметр γ , как известно, характеризует наклон кривой $K_{Ic}(T)$, поэтому полученный результат ясно

показывает, что наклон кривой $K_{Jc}(T)$ для охрупченной стали меньше, чем принятый для “Master curve”. Именно это обстоятельство приводит к существенному расхождению экспериментальных результатов и кривых $K_{Ic}(T)$, рассчитанных согласно концепции “Master curve”, для охрупченной стали (рис. 4). В то же время следует отметить, что разброс экспериментальных значений трещиностойкости для охрупченной стали может быть достаточно хорошо описан с помощью первого положения концепции “Master curve”, если медианная кривая $K_{Ic(med)}(T)$ принимается зависящей от степени охрупчивания материала, т.е. параметр γ принят как функция степени охрупчивания материала.

5.3. *Прогнозирование трещиностойкости на основе вероятностной модели.* Параметры, необходимые для расчета кривых $K_{Ic}(T)$, определяли по результатам испытаний гладких цилиндрических образцов и образцов Шарпи с трещиной. Размер элементарной ячейки ρ_{uc} полагали равным 0,05 мм, как ранее для исходного состояния стали. Согласно [10], принимали $m_0 = 0,1 \text{ МПа}^{-1}$ и согласно разделу 3.2 – $\sigma_{d0} = 1842 \text{ МПа}$. Зависимость $m_T(T)$ вычисляли по уравнению $m_T(T) = m_0[\sigma_Y(T) - \sigma_Y(T = 450^\circ\text{C})]$. Здесь в качестве температуры T_{YG} (см. раздел 1.3) принимали $T = 450^\circ\text{C}$ с тем, чтобы исключить увеличение предела текучести, которое наблюдалось в диапазоне температур 100...350°C, за счет деформационного старения охрупченной стали.

Параметры $\tilde{\sigma}_d$ и η определяли согласно процедуре, представленной в разделе 1.3, по данным табл. 3. Было получено $\tilde{\sigma}_d = 4103 \text{ МПа}$ и $\eta = 12$. Функция $P_f(\sigma_w)$, рассчитанная по уравнению (11), и эмпирическая функция показаны на рис. 6.

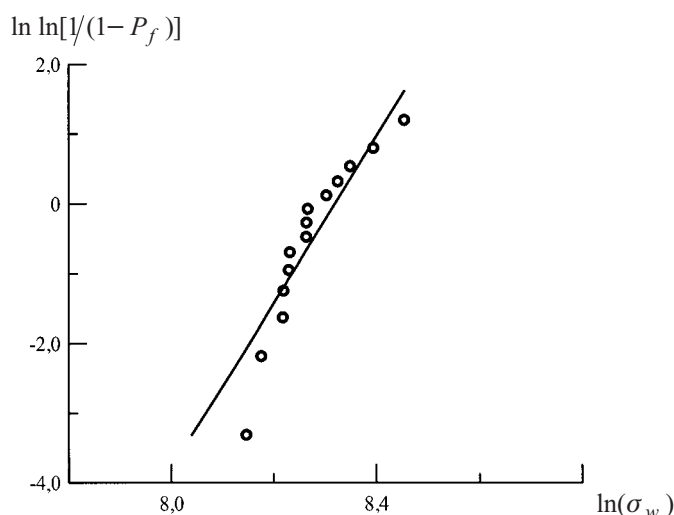


Рис. 6. Сопоставление расчетной (прямая) и эмпирической (точки) функций $P_f(\sigma_w)$ для образцов Шарпи с трещиной из стали 15X2НМФА в охрупченном состоянии.

Зависимости $K_{Ic}(T)$, рассчитанные по вероятностной модели при $P_f = 0,05; 0,5$ и $0,95$, иллюстрирует рис. 7 для образцов с трещиной толщиной $B = 50 \text{ мм}$. Там же приведены экспериментальные значения трещино-

стойкости для образцов 2Т-СТ. Соответствие экспериментальных и расчетных результатов весьма хорошее.

Полученные результаты показывают, что вероятностная модель позволяет описать как сдвиг, так и изменение формы кривых $K_{Ic}(T)$ для охрупченной стали.

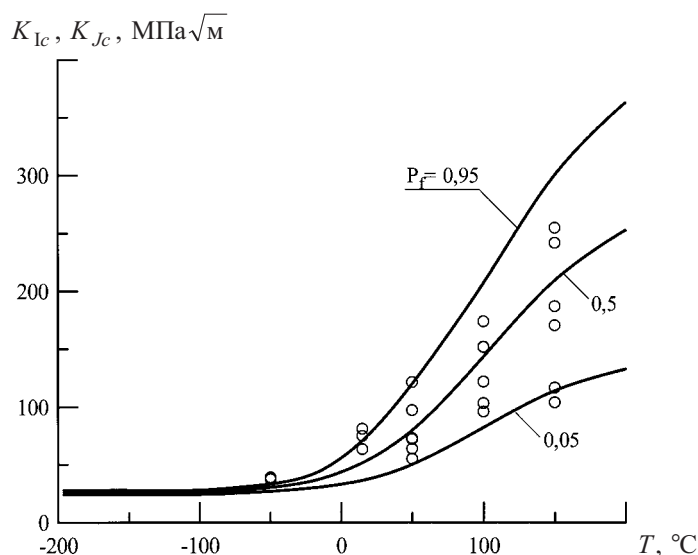


Рис. 7. Кривые $K_{Ic}(T)$, рассчитанные согласно вероятностной модели для образцов с трещиной толщиной $B = 50$ мм из стали 15X2НМФА в охрупченном состоянии при разной вероятности хрупкого разрушения: точки – экспериментальные значения трещиностойкости для образцов 2Т-СТ с 20%-ными боковыми надрезами.

Заключение. Кривые $K_{Ic}(T)$ для стали 15X2НМФА в исходном состоянии, рассчитанные на основе “Master curve”-подхода и вероятностной модели, хорошо согласуются друг с другом. Для калибровки параметров “Master curve” и вероятностной модели использованы одни и те же результаты испытаний на трещиностойкость малоразмерных образцов.

Для стали 15X2НМФА с высокой степенью охрупчивания расчет на основе “Master curve”-подхода дает неадекватные и неконсервативные прогнозы температурной зависимости трещиностойкости: экспериментальные точки лежат значительно ниже кривой $K_{Ic}(T)$, соответствующей вероятности хрупкого разрушения $P_f = 0,05$.

Экспоненциальная аппроксимация экспериментальных значений K_{Ic} для образцов 2Т-СТ из стали в охрупченном состоянии показала, что наклон кривой $K_{Ic}(T)$ для этой стали значительно меньше принятого для “Master curve”. Причина неадекватного описания температурной зависимости трещиностойкости для охрупченной стали на основе “Master curve”-подхода состоит в том, что он не учитывает уменьшение наклона кривой $K_{Ic}(T)$.

Кривые $K_{Ic}(T)$ для стали 15X2НМФА в охрупченном состоянии, рассчитанные согласно вероятностной модели по результатам испытаний гладких цилиндрических образцов и образцов Шарпи с трещиной при $T = 30^\circ\text{C}$, хорошо согласуются с результатами испытаний образцов 2Т-СТ.

Резюме

На основі імовірнісної моделі і “Master curve”-підходу виконано прогнозування температурної залежності тріщиностійкості при крихкому руйнуванні корпусної реакторної сталі 15Х2НМФА в початковому і сильно окрихчуваному стані за результатами випробувань зразків типу Шарпі з тріщиною на тріщиностійкість за деякої однієї температури. Зіставлення кривих $K_{Ic}(T)$, отриманих за цими підходами, показало їхню хорошу відповідність. При випробуванні компактних зразків 2Т-СТ зі сталі в окрихчуваному стані отримано експериментальні значення тріщиностійкості в широкому діапазоні температур, які зіставляли з розрахунковими кривими $K_{Ic}(T)$. Показано, що для окрихчуваної сталі крива $K_{Ic}(T)$, розрахована на основі “Master curve”-підходу, не описує експериментальні результати адекватно, в той час як відповідність експериментальних даних по тріщиностійкості і кривих $K_{Ic}(T)$, розрахованих за імовірнісною моделлю, добра.

1. Wallin K. The scatter in K_{Ic} results // Eng. Fract. Mech. – 1984. – **19**. – P. 1085 – 1093.
2. Wallin K. The size effect in K_{Ic} results // Ibid. – 1985. – **22**. – P. 149 – 163.
3. ASTM E 1921-97. Standard Test Method for Determination of Reference Temperature, T_0 , for Ferritic Steels in the Transition Range // Annual Book of ASTM Standards. – 1998. – Vol. 03.01. – P. 1068 – 1084.
4. Merkle J. G., Wallin K., and McCabe D. E. Technical basis for an ASTM standard on determining the reference temperature, T_0 , for ferritic steels in the transition range. – NUREG/CR-5504, ORNL/TM-13631, 1999.
5. Wilshaw T. R., Rau C. A., and Tetelman A. S. A general model to predict the elastic distribution and fracture strength of notched bars in plane strain bending // Eng. Fract. Mech. – 1968. – **1**. – P. 191 – 211.
6. Knott J. F. Fundamentals of Fracture Mechanics. – London: Butterworths, 1973.
7. Ritchie R. O., Knott J. F., and Rice J. R. On the relation between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel // J. Mech. Phys. Solids. – 1973. – **21**. – P. 395 – 410.
8. Beremin F. M. A local criterion for cleavage fracture of a nuclear pressure vessel steel // Met. Trans. – 1983. – **14A**. – P. 2277 – 2287.
9. Марголин Б. З., Швецова В. А. Критерий хрупкого разрушения: структурно-механический подход // Пробл. прочности. – 1992. – № 2. – С. 3 – 16.
10. Margolin B. Z., Gulenko A. G., and Shvetsova V. A. Improved probabilistic model for fracture toughness prediction based for nuclear pressure vessel steels // Int. J. Pres. Ves. Piping. – 1998. – **75**. – P. 843 – 855.
11. Карзов Г. П., Тимофеев Б. Т., Леонов В. П. Сварные сосуды давления: прочность и долговечность. – Л.: Машиностроение, 1982.

12. *Alekseenko N. N., Amaev A. D., Gorynin I. V., and Nikolaev V. A.* Radiation Damage of Nuclear Power Plant Pressure Vessel Steels. – Grange Park: American Nuclear Society, 1987.
13. *Bush S. H.* Structural materials for nuclear power plants // *J. Test. Eval.* – 1974. – 2. – P. 435 – 462.
14. *Margolin B. Z., Shvetsova V. A., and Gulenko A. G.* Radiation embrittlement modeling for reactor pressure vessel steels: I. Brittle fracture toughness prediction // *Int. J. Pres. Ves. Piping.* – 1999. – 76. – P. 715 – 729.
15. *Margolin B. Z., Shvetsova V. A., and Karzov G. P.* Brittle fracture of nuclear pressure vessel steels. Pt. I. Local criterion for cleavage fracture // *Ibid.* – 1997. – 72. – P. 73 – 87.
16. *Margolin B. Z., Karzov G. P., and Shvetsova V. A.* Brittle fracture of nuclear pressure vessel steels. Pt. II. Prediction of fracture toughness // *Ibid.* – P. 89 – 96.
17. *Weibull W. A.* A statistical theory of the strength of materials // *Roy Swed Inst. Eng. Res.* – 1939. – 151. – P. 5 – 45.
18. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1978.
19. *ASTM E 399-74.* Standard Test Method for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials // *Annual Book of ASTM Standards.* – 1974. – Vol. 03.01. – P. 509 – 539.

Поступила 08. 06. 2001

Эллиптическая трещина нормального отрыва в бесконечном упругом теле. Сообщение 1. Перемещение берегов трещины при полиномиальном законе нагружения

И. В. Орыняк, А. Ю. Гиенко

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрена внутренняя эллиптическая трещина нормального отрыва в неограниченном упругом теле. Модифицирована описанная ранее методика определения весовой функции и коэффициента интенсивности напряжений. Получены аналитические и численные значения коэффициента интенсивности напряжений вдоль фронта трещины для различных случаев полиномиального закона нагружения.

Предложен подход к определению перемещений берегов трещины по значениям коэффициента интенсивности напряжений, в котором используются уравнение энергетического баланса Райса, теорема Дайсона и теория трансляции трещин в неоднородном поле напряжений. Получено замкнутое выражение для перемещений берегов эллиптической трещины при полиномиальном законе нагружения любой степени, которое может быть использовано в решении пространственных задач теории упругости с трещинами.

В инженерных конструкциях реальные дефекты моделируются трещинами в форме эллипса или его части. Несмотря на универсальность и многообразие применяемых численных методов, развитие аналитических методов расчета тел с эллиптическими трещинами остается актуальной задачей. Аналитические решения используются при проверке точности численных решений, при выделении сингулярностей и асимптотических особенностей решения, при создании на их основе эффективных численных процедур, например в методе альтернирования [1, 2] или методе граничных элементов [3].

Фундаментальное решение теории упругости для эллиптической трещины в бесконечном теле еще не найдено. Тем не менее достигнут прогресс в анализе трещин, которые находятся в поле нормальных напряжений, определяемых полиномами.

Первое аналитическое решение было получено Грином и Снеддоном [4] для трещин в однородном поле напряжений. Сегедин [5] ввел в рассмотрение семейство потенциальных функций, обеспечивающих выполнение заданных граничных условий на берегах трещины. В работах Ша и Кобаяши [6], Атлури и др. [7] эти функции использовались при установлении общей процедуры нахождения решения для полиномиального распределения напряжений. Однако в этих подходах используется трудоемкий аппарат эллиптических функций Якоби и эллипсоидальных функций Ламе, что ограничивает их практическое применение.

В работе [8] был предложен более простой путь, основанный на теореме Дайсона [9]. Согласно последней, перемещения берегов эллиптической трещины под действием нормальных напряжений, определяемых полиномами степени N , должны иметь следующий вид:

$$W(x,y) = \sqrt{1 - \left(\frac{y}{a}\right)^2 - \left(\frac{x}{b}\right)^2} \sum_{i+j=0}^N W_{ij} \left(\frac{y}{a}\right)^i \left(\frac{x}{b}\right)^j, \quad (1)$$

где W_{ij} – некоторые постоянные коэффициенты. Соответствующее выражение для напряжений таково:

$$q(x,y) = \left(\frac{y}{a}\right)^k \left(\frac{x}{b}\right)^l, \quad (2)$$

где $k + l = N$ или, что эквивалентно:

$$q(\rho, \varphi) = \rho^N \cos m\varphi; \quad (3a)$$

$$q(\rho, \varphi) = \rho^N \sin m\varphi \quad (3б)$$

(a и b – меньшая и большая полуоси эллипса; (ρ, φ) – параметрические координаты с началом в центра эллипса (см. ниже)).

Использование результатов теоремы Дайсона позволило свести определение коэффициентов W_{ij} к потенциалам эллиптического диска, что, в свою очередь, дало возможность численно решать задачу для любой степени N полиномиальной нагрузки [8].

В работе [10] предложен оригинальный метод интегральных уравнений для решения интегро-дифференциального уравнения, которое связывает поле перемещений с нагрузкой, действующей на поверхности трещины. Это позволило найти весовую функцию при полиномиальном нагружении до второй степени ($N=2$).

Для всех указанных работ общим является то, что вначале определяется поле перемещений берегов трещины, а коэффициент интенсивности напряжений (КИН) является уже следствием этих решений. Оригинальный подход нахождения решения для КИН (весовой функции (ВФ)) без предварительного определения поля перемещений предложен ранее [11]. В нем использованы качественные результаты теоремы Дайсона [9] и метод трансляций трещины в неоднородном поле напряжений [12].

Тем не менее перемещения берегов трещины представляют большой интерес, поскольку позволяют достаточно просто получить гармонические потенциальные функции и решение краевых задач теории упругости.

Цель настоящей статьи, являющейся логическим продолжением [11], – установление поля перемещений берегов эллиптической трещины нормального отрыва для заданного полиномиального закона нагружения ее берегов. Технически задача сводится к определению коэффициентов W_{ij} решения (1) при заданном законе нагружения (3).

1. Базовые результаты и понятия. Системы координат. В случае эллиптической трещины наряду с прямоугольной (x, y) и полярной (r, θ) системами координат широко используется параметрическая система коор-

динат (ρ, φ) с началом в центре эллипса. Связь между параметрическими и полярными координатами имеет следующий вид:

$$\operatorname{tg} \theta = \alpha \operatorname{tg} \varphi; \quad \rho = \frac{r}{R(\theta)}; \quad R(\theta) = \frac{a}{\sqrt{\sin^2 \theta + \alpha^2 \cos^2 \theta}}, \quad (4)$$

где α – отношение полуосей эллипса, $\alpha = a/b \leq 1, 0$; $R(\theta)$ – полярный радиус точек контура эллипса.

Ветви нагрузки. Напряжения, приложенные к берегам трещины, можно разделить на четыре ветви по виду симметрии относительно полуосей и центра эллипса. К первой ветви отнесем напряжения, симметричные относительно полуосей a и b , ко второй – симметричные относительно a и кососимметричные относительно b , к третьей – симметричные относительно b и кососимметричные относительно a и, наконец, к четвертой – напряжения, кососимметричные относительно полуосей a и b . Соответственно выражения для полиномиальных нагрузок (3а) и (3б) можно представить в следующем виде:

$$q(\rho, \varphi) = q_{2i+k, 2j+k}^c \rho^{2i+k} \cos(2j+k)\varphi, \quad 0 \leq j \leq i; \quad (5a)$$

$$q(\rho, \varphi) = q_{2i-k, 2j-k}^s \rho^{2i-k} \sin(2j-k)\varphi, \quad 1 \leq j \leq i, \quad (5б)$$

где $2i+k=N$; индекс k обозначает принадлежность к одной из указанных ветвей нагрузки (в выражении (5а): $k=0$ – для первой ветви, $k=1$ – для второй; в (5б): $k=0$ – для четвертой, $k=1$ – для третьей).

Ортонормированная на эллипсе система функций. Ранее [11] предложена ортогональная с весом $\Pi^{1/2}(\varphi)$ нормированная система функций $ce_n(\varphi)$, $se_n(\varphi)$:

$$\int_0^{2\pi} ce_i(\varphi) ce_j(\varphi) \Pi^{1/2}(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} se_i(\varphi) se_j(\varphi) \Pi^{1/2}(\varphi) d\varphi = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ 1, & i = j; \end{cases} \quad (6)$$

$$\int_0^{2\pi} ce_i(\varphi) se_j(\varphi) \Pi^{1/2}(\varphi) d\varphi = 0,$$

где $\Pi^{1/2}(\varphi)$ – безразмерный элемент длины контура эллипса;

$$\Pi^{1/2}(\varphi) = \sqrt{\sin^2 \varphi + \alpha^2 \cos^2 \varphi}. \quad (7)$$

Данная система функций строится на базе тригонометрических функций синусов и косинусов. Функцию $\cos n\varphi$ можно выразить через систему функций $ce_n(\varphi)$ в виде

$$\cos n\varphi = \beta_{n,n}ce_n(\varphi) + \beta_{n,n-2}ce_{n-2}(\varphi) + \dots = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \beta_{n,n-2m}ce_{n-2m}(\varphi). \quad (8a)$$

Аналогично $\sin n\varphi$ можно представить как

$$\sin n\varphi = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} v_{n,n-2m}se_{n-2m}(\varphi), \quad (8б)$$

где $\beta_{n,n-2m}, v_{n,n-2m}$ – некоторые постоянные коэффициенты; здесь и далее скобки $[\cdot]$ над знаком суммы обозначают целую часть от выражения, заключенного внутри них.

Коэффициенты $\beta_{n,n-2m}$ определяются из выражения (8a) для всех индексов n и $n - 2m$, начиная с низших значений и далее, домножая левые и правые части (8a) на $\cos k\varphi$ (при этом k принимает значения $0, 1, \dots, n$) и интегрируя с весом $\Pi^{1/2}(\varphi)$ с учетом условий ортогональности (6). В результате получена следующая рекуррентная формула для определения искоемых коэффициентов:

$$\beta_{n,p} = \begin{cases} \frac{1}{\beta_{p,p}} \left(M_{n,p} - \sum_{i=1}^{\left[\frac{p}{2}\right]} \beta_{n,p-2i} \beta_{p,p-2i} \right), & p < n; \\ \sqrt{M_{n,n} - \sum_{i=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (\beta_{n,n-2i})^2}, & p = n, \end{cases} \quad (9)$$

где $p = n - 2m \geq 0$; $[p/2]$ – целая часть от деления $p/2$; $M_{n,p}$ – определенные интегралы следующего вида:

$$M_{n,p} = \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos p\varphi \Pi^{1/2}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} (M_{n+p} + M_{n-p}); \quad (10a)$$

$$M_k = \int_0^{2\pi} \cos k\varphi \Pi^{1/2}(\varphi) d\varphi. \quad (10б)$$

По аналогии получена рекуррентная формула для определения неизвестных коэффициентов $v_{n,n-2m}$ с использованием выражения (8б):

$$v_{n,p} = \begin{cases} \frac{1}{v_{p,p}} \left(L_{n,p} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor} v_{n,p-2i} v_{p,p-2i} \right), & p < n; \\ \sqrt{L_{n,n} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (v_{n,n-2i})^2}, & p = n, \end{cases} \quad (11)$$

где $p > 0$; $L_{n,p}$ – коэффициенты,

$$L_{n,p} = \int_0^{2\pi} \sin n\varphi \sin p\varphi \Pi^{1/2}(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2}(M_{n-p} - M_{n+p}). \quad (12)$$

Например, из выражений (9) и (11) следует

$$\begin{aligned} \beta_{0,0} &= \sqrt{M_{0,0}}; \quad \beta_{1,1} = \sqrt{M_{1,1}}; \quad \beta_{2,0} = \frac{M_{2,0}}{\beta_{0,0}}; \quad \beta_{2,2} = \sqrt{M_{2,2} - (\beta_{2,0})^2}; \\ v_{1,1} &= \sqrt{L_{1,1}}; \quad v_{2,2} = \sqrt{L_{2,2}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Коэффициенты $M_{n,p}$ и $L_{n,p}$ легко могут быть найдены численным интегрированием, поскольку не содержат особенностей либо получены аналитически, например:

$$\begin{cases} M_{0,0} = 4E(k); \\ M_{1,1} = \frac{4}{3k^2} [(2k^2 - 1)E(k) + (1 - k^2)K(k)]; \\ L_{1,1} = \frac{4}{3k^2} [(1 + k^2)E(k) - (1 - k^2)K(k)], \end{cases} \quad (14)$$

где $k^2 = 1 - \alpha^2$; $E(k)$, $K(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Ранее [11] приведены общие формулы для определения коэффициентов $\beta_{n,n-2m}$ и $v_{n,n-2m}$. Однако выражения (9) и (11), на наш взгляд, более наглядны и удобны для практического использования.

Функции $se_n(\varphi)$ и $se_n(\varphi)$ можно записать через тригонометрические функции следующим образом:

$$ce_n(\varphi) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \varepsilon_{n,n-2m} \cos(n-2m)\varphi; \quad (15a)$$

$$se_n(\varphi) = \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \chi_{n,n-2m} \sin(n-2m)\varphi, \quad (15b)$$

где $\varepsilon_{n,n-2m}$ и $\chi_{n,n-2m}$ – некоторые постоянные коэффициенты.

Выражение (15a) является обратным (8a), и коэффициенты $\varepsilon_{n,n-2m}$ и $\beta_{n,n-2m}$ – взаимосвязаны как элементы обратных матриц. Структуру последних можно представить на примере преобразования (8a) для ряда функций косинуса с четными аргументами, записанного в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} \cos 0\varphi \\ \cos 2\varphi \\ \dots \\ \cos(2l)\varphi \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{0,0} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{2,0} & \beta_{2,2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{2l,0} & \beta_{2l,2} & \dots & \beta_{2l,2l} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} ce_0(\varphi) \\ ce_2(\varphi) \\ \dots \\ ce_{2l}(\varphi) \end{Bmatrix}. \quad (16)$$

Аналогичный вид имеет матрица преобразования для нечетных аргументов косинуса. Таким образом,

$$\{\varepsilon_k\} = \{\beta_k\}^{-1}, \quad (17)$$

где

$$\{\varepsilon_k\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ \varepsilon_{2+k,k} & \varepsilon_{2+k,2+k} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_{2l+k,k} & \varepsilon_{2l+k,2+k} & \dots & \varepsilon_{2l+k,2l+k} \end{pmatrix};$$

$$\{\beta_k\} = \begin{pmatrix} \beta_{k,k} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{2+k,k} & \beta_{2+k,2+k} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{2l+k,k} & \beta_{2l+k,2+k} & \dots & \beta_{2l+k,2l+k} \end{pmatrix},$$

$k = 0, 1; 2l + k = 0, \dots, N$. Размерности таких матриц: $(l+1) \times (l+1)$.

Коэффициенты $\chi_{n,n-2m}$ (15b) и $v_{n,n-2m}$ (8b) также взаимосвязаны между собой:

$$\{\chi_k\} = \{v_k\}^{-1}. \quad (18)$$

Заметим, что размерности этих матриц будут $(l+k) \times (l+k)$, поскольку при $k=0$ в обеих матрицах отсутствуют первые строка и столбец.

2. Весовая функция. По определению (см., например, [13]), весовой функцией называется коэффициент интенсивности напряжений нормального отрыва в точке Q' контура трещины при действии пары симметричных единичных сил, приложенных в произвольной точке Q на поверхности трещины. Таким образом, зная весовую функцию в каждой точке поверхности трещины, можно получить КИН для любого распределения напряжений. Ранее [11] было показано, что ВФ для эллиптической трещины в неограниченном теле при полиномиальном законе распределения напряжений степени N на ее поверхности можно определить в виде ряда:

$$F(\rho, \varphi, t) = \frac{2}{\pi ab \sqrt{1-\rho^2}} \left[\sum_{n=0}^N A_n(\rho, \varphi) ce_n(t) + \sum_{n=1}^N B_n(\rho, \varphi) se_n(t) \right], \quad (19)$$

где t – параметрический угол точки контура трещины; ρ, φ – координаты точки на поверхности трещины; A_n, B_n – некоторые неизвестные функции. Используя выражение (19) [11] и расписывая функции $ce_n(\varphi)$ согласно (15а) настоящей работы, представим функцию $A_n(\rho, \varphi)$ в следующем виде:

$$\begin{aligned} A_n(\rho, \varphi) = & \rho^n \sum_{m=0}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \varepsilon_{n, n-2m} \cos(n-2m)\varphi + \\ & + (1-\rho^2) \sum_{m=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \sum_{j=0}^{m-1} a_{n-2m, 2j}^n \rho^{n-2m+2j} \cos(n-2m)\varphi. \end{aligned} \quad (20)$$

Аналогично, используя (20) [11] и (15б), получаем

$$\begin{aligned} B_n(\rho, \varphi) = & \rho^n \sum_{m=0}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \varepsilon_{n, n-2m} \sin(n-2m)\varphi + \\ & + (1-\rho^2) \sum_{m=1}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \sum_{j=0}^{m-1} b_{n-2m, 2j}^n \rho^{n-2m+2j} \sin(n-2m)\varphi, \end{aligned} \quad (21)$$

где $a_{n-2m, 2j}^n, b_{n-2m, 2j}^n$ – неизвестные постоянные коэффициенты.

Каждая функция A_n, B_n содержит $S_n = \frac{r}{2}(1+r)$ неизвестных коэффициентов, где $r = \left[\frac{n}{2} \right]$ в случае A_n , $r = \left[\frac{n-1}{2} \right]$ в случае B_n . Заметим, что эти коэффициенты отличаются от рассматриваемых в работе [11], однако определяются таким же способом. Для этого используется очевидное следствие теоремы Дайсона: при полиномиальном законе нагружения степени N вклад в КИН от функций A_n, B_n , где $n > N$, должен быть равен нулю. Для фиксированного значения индекса n , интегрируя весовую функцию (19) по одной стороне поверхности трещины совместно с серией полиномов (5а), где $j = 0, \dots, [(n-k)/2]$; $i = j, \dots, [(n-k)/2]$, получаем совокупность независимых систем уравнений для определения неизвестных коэффициентов $a_{n-2m,2j}^n$ функции A_n в виде

$$\varepsilon_{n,n-2m} I_{2(n-m+i)+1} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{I_{2(n-2m+i+j)+1}}{2(n-2m+i+j)+3} a_{n-2m,2j}^n = 0, \quad (22)$$

где $m = 1, \dots, n$; $i = 0, \dots, m-1$;

$$I_{2m+1} = \int_0^1 \frac{\rho^{2m+1}}{\sqrt{1-\rho^2}} d\rho = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \quad (23)$$

Таким образом, выражение (22) представляет собой n независимых систем уравнений, каждая из которых содержит m уравнений и m неизвестных.

Аналогично получено выражение для определения коэффициентов $b_{n-2m,2j}^n$ функции B_n :

$$\chi_{n,n-2m} I_{2(n-m+i)+1} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{I_{2(n-2m+i+j)+1}}{2(n-2m+i+j)+3} b_{n-2m,2j}^n = 0, \quad (24)$$

где $m = 1, \dots, n$; $i = 0, \dots, m-1$.

3. Решение для КИН. Если известна весовая функция, то решение для КИН при любом законе распределения напряжений $q(\rho, \varphi)$ на поверхности трещины S определяется интегралом:

$$\bar{K}_1(t) = \int_{(S)} F(\rho, \varphi, t) q(\rho, \varphi) dS, \quad (25)$$

где dS – элементарная площадь поверхности трещины в параметрических координатах, $dS = ab\rho d\rho d\varphi$. В дальнейшем для удобства используем нормированное выражение для коэффициента интенсивности напряжений:

$$\bar{K}_I(t) = \frac{K_I(t)}{\sqrt{\pi a} \Pi^{1/4}(t)}. \quad (26)$$

Подставив (5а) и (19) в (25) и проинтегрировав, получим КИН для случая действия на берегах трещины нагрузки первой или второй ветвей:

$$\bar{K}_{I_{2n+k,2p+k}}(t) = 2q_{2n+k,2p+k}^c (1 + \delta_{2p+k,0}) \sum_{l=p}^n \Omega_{2n+k,2p+k}^{2l+k} c e_{2l+k}(t), \quad (27)$$

$$0 \leq p \leq n,$$

где $\delta_{2p+k,0}$ – символы Кронекера: $\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$; напомним, что k определяет принадлежность к определенной ветви нагружения ($k = 0, 1$);

$$\Omega_{2n+k,2p+k}^{2l+k} = \sum_{j=0}^{l-p} k_{2p+k,2j}^{2l+k} I_{2(n+p+j+k)+1}; \quad (28)$$

$k_{2p+k,2j}^{2l+k}$ – постоянные коэффициенты,

$$k_{2p+k,2j}^{2l+k} = \begin{cases} \varepsilon_{2l+k,2l+k}, & j=0, & p=l; \\ a_{2p+k,0}^{2l+k}, & j=0, & p < l; \\ \varepsilon_{2l+k,2p+k} - a_{2p+k,2(l-p-1)}^{2l+k}, & j=l-p, & p < l; \\ a_{2p+k,2j}^{2l+k} - a_{2p+k,2j-2}^{2l+k}, & 0 < j < l-p, & p < l. \end{cases} \quad (29)$$

Аналогично получим КИН при действии третьей и четвертой ветвей нагружения, описываемых полиномами (5б):

$$\bar{K}_{I_{2n-k,2p-k}}(t) = 2q_{2n-k,2p-k}^s \sum_{l=p}^n \Delta_{2n-k,2p-k}^{2l-k} s e_{2l-k}(t), \quad 1 \leq p \leq n, \quad (30)$$

где

$$\Delta_{2n-k,2p-k}^{2l-k} = \sum_{j=0}^{l-p} r_{2p-k,2j}^{2l-k} I_{2(n+p+j-k)+1}; \quad (31)$$

$$r_{2p-k,2j}^{2l-k} = \begin{cases} \chi_{2l-k,2l-k}, & j=0, & p=l; \\ b_{2p-k,0}^{2l-k}, & j=0, & p < l; \\ \chi_{2l-k,2p-k} - b_{2p-k,2(l-p-1)}^{2l-k}, & j=l-p, & p < l; \\ b_{2p-k,2j}^{2l-k} - b_{2p-k,2j-2}^{2l-k}, & 0 < j < l-p, & p < l. \end{cases} \quad (32)$$

4. Перемещения берегов эллиптической трещины. Перемещения берегов трещины (1) удобно представить в параметрических координатах. Соответствующее выражение в случае действия нагрузок первой или второй ветвей, описываемых полиномами (5а), примет вид

$$W_{2n+k,2p+k}(\rho, \varphi) = a\sqrt{1-\rho^2} \sum_{m=0}^n \sum_{j=m}^n d_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k} \rho^{2j+k} \cos(2m+k)\varphi, \quad (33a)$$

где $k = 0, 1$; $0 \leq p \leq n$. Аналогично при действии нагрузок третьей и четвертой ветвей (5б) получим

$$W_{2n-k,2p-k}(\rho, \varphi) = a\sqrt{1-\rho^2} \sum_{m=0}^n \sum_{j=m}^n e_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k} \rho^{2j-k} \sin(2m-k)\varphi, \quad (33б)$$

где $k = 0, 1$; $1 \leq p \leq n$; $d_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k}$, $e_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k}$ – неизвестные постоянные коэффициенты. Эти коэффициенты можно определить, приравнявая полные вариации перемещений берегов трещины, полученные, с одной стороны, из уравнения энергетического баланса Райса [14] и, с другой стороны, непосредственно из (33), варьируя последние в соответствии с [12]. При этом, как было показано в работе [12], необходимо учитывать изменение нагрузок на берегах трещины вследствие изменения формы трещины. Согласно [12], полную вариацию перемещений берегов трещины при пропорциональном изменении ее формы ($\delta a / \delta b = \alpha = \text{const}$) можно представить так:

$$\frac{\delta W(q)}{\delta a} = \frac{\partial W(q)}{\partial a} - W\left(\frac{\partial q}{\partial a}\right), \quad (34)$$

где $W(q)$ – перемещения берегов трещины при соответствующем распределении нагрузок $q(\rho, \varphi)$ на ее берегах.

Для полиномиального закона нагружения (5) следует

$$W\left(\frac{\partial q_{2n+k,2p+k}(\rho, \varphi)}{\partial a}\right) = -\frac{2n+k}{a} W_{2n+k,2p+k}(\rho, \varphi). \quad (35)$$

Заметим, что в случае однородного нагружения ($n = k = 0$) выражение (34) преобразуется к виду

$$\frac{\delta W(q)}{\delta a} = \frac{\partial W(q)}{\partial a}. \quad (36)$$

Таким образом, подставив (33а) и (35) в правую часть (34), получим вариацию перемещений берегов трещины при действии первой и второй ветвей нагрузки:

$$\frac{\delta W(\rho, \varphi)}{\delta a} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{m=0}^n \sum_{j=m}^n [1 + (2n-2j)(1-\rho^2)] d_{2j+k, 2m+k}^{2n+k, 2p+k} \rho^{2j+k} \cos(2m+k)\varphi. \quad (37)$$

Уравнение энергетического баланса интегрально связывает значения КИН для двух случаев нагружения берегов трещины, а также полную вариацию перемещений берегов трещины для одного случая нагружения и распределение напряжений для другого. Это уравнение позволяет найти полную вариацию перемещений берегов трещины при известных нагрузках на ее берегах и способе изменения формы трещины. Выбирая полиномиальный закон в качестве первого случая нагружения, а нагружение парой симметричных сосредоточенных сил в качестве второго, уравнение энергетического баланса при пропорциональном изменении формы трещины (см. выше) запишем в виде

$$\frac{\pi ab}{H} \int_0^{2\pi} F(\rho, \varphi, t) \bar{K}_I(t) \Pi^{1/2}(t) dt = \frac{\delta W(\rho, \varphi)}{\delta a}. \quad (38)$$

Подставив в (38) выражение для весовой функции (19), КИН (27) и проинтегрировав с учетом условий ортогональности (6), получим выражение для вариации перемещений берегов трещины под действием первой и второй ветвей нагружения:

$$\frac{\delta W_{2n+k, 2p+k}(\rho, \varphi)}{\delta a} = \frac{4q_{2n+k, 2p+k}(1 + \delta_{2p+k, 0})}{H\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=p}^n A_{2l+k}(\rho, \varphi) \Omega_{2n+k, 2p+k}^{2l+k}. \quad (39)$$

Далее, представив функцию A_n в виде (20) и перегруппировав члены, получим

$$\frac{\delta W_{2n+k, 2p+k}(\rho, \varphi)}{\delta a} = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \sum_{l=p}^n \sum_{m=0}^n \sum_{j=m}^n h_{2j+k, 2m+k}^{2n+k, 2p+k} \rho^{2j+k} \cos(2m+k)\varphi, \quad (40)$$

где

$$h_{2j+k, 2m+k}^{2n+k, 2p+k} = \frac{4q_{2n+k, 2p+k}(1 + \delta_{2p+k, 0})}{H} \sum_{l=\max\{p, j\}}^n k_{2m+k, 2(j-m)}^{2l+k} \Omega_{2n+k, 2p+k}^{2l+k}. \quad (41)$$

Отметим, что нельзя получить решение для перемещений берегов трещины, находящейся в неоднородном поле нагружений, просто интегрируя (40) по характерному размеру трещины, поскольку при этом необходимо учитывать

изменение поля напряжений, происходящее из-за изменения формы трещины.

Приравнивая выражения (37) и (40) при одинаковых степенях ρ и аргументах косинуса, получаем следующую итерационную формулу для определения искомых коэффициентов поля перемещений берегов трещины (33а) при действии первой и второй ветвей полиномиального нагружения (5а):

$$d_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k} = \begin{cases} \frac{h_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k}}{2n-2j+1}, & j = m; \\ \frac{h_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k} + (2n-2j+2)d_{2j-2+k,2m+k}^{2n+k,2p+k}}{2n-2j+1}, & j > m. \end{cases} \quad (42)$$

По аналогии определяются неизвестные коэффициенты в решении для поля перемещений берегов трещины (33б) при действии третьей и четвертой ветвей полиномиального нагружения (5б):

$$e_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k} = \begin{cases} \frac{l_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k}}{2n-2j+1}, & j = m; \\ \frac{l_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k} + (2n-2j+2)e_{2j-2-k,2m-k}^{2n-k,2p-k}}{2n-2j+1}, & j > m, \end{cases} \quad (43)$$

где

$$l_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k} = \frac{4q_{2n-k,2p-k}}{H} \sum_{l=\max\{p,j\}}^n r_{2m-k,2(j-m)}^{2l-k} \Delta_{2n-k,2p-k}^{2l-k}. \quad (44)$$

Заметим, что выражения (33) представляют собой перемещения одного берега трещины. Для получения полного поля перемещений (обоих берегов трещины) необходимо удвоить полученные значения.

5. КИН и перемещения берегов круговой трещины. В случае круговой трещины $\alpha = 1$. Выражение (19) для весовой функции при этом примет следующий вид:

$$F(\rho, \varphi, t) = \frac{2}{\pi a^2 \sqrt{1-\rho^2}} \left[\sum_{n=0}^N (\varepsilon_{n,n})^2 \rho^n \cos n\varphi \cos nt + \sum_{n=1}^N (\chi_{n,n})^2 \rho^n \sin n\varphi \sin nt \right], \quad (45)$$

где

$$(\varepsilon_{0,0})^2 = \frac{1}{2\pi}; \quad (\varepsilon_{n,n})^2 = (\chi_{n,n})^2 = \frac{1}{\pi}, \quad n > 0. \quad (46)$$

В результате интегрирования (45) КИН для первой и второй ветвей нагружения в случае круговой трещины имеет вид

$$\bar{K}_{I_{2n+k,2p+k}}(t) = \frac{2}{\pi} q_{2n+k,2p+k}^c I_{2(n+p+k)+1} \cos(2p+k)t, \quad 0 \leq p \leq n. \quad (47a)$$

Аналогично для третьей и четвертой ветвей нагружения запишем

$$\bar{K}_{I_{2n-k,2p-k}}(t) = \frac{2}{\pi} q_{2n-k,2p-k}^s I_{2(n+p-k)+1} \sin(2p-k)t, \quad 1 \leq p \leq n. \quad (47b)$$

Подставив (42) и (47a) в уравнение энергетического баланса (38), получим вариацию поля перемещений берегов круговой трещины:

$$\frac{\delta W_{2n+k,2p+k}(\rho, \varphi)}{\delta a} = \frac{4q_{2n+k,2p+k}^c}{\pi H \sqrt{1-\rho^2}} I_{2(n+p+k)+1} \rho^{2p+k} \cos(2p+k)\varphi. \quad (48)$$

Поле перемещений берегов круговой трещины представляется, как и в случае эллиптической трещины, в виде (33a) или (33б). Неизвестные коэффициенты определяются аналогично. Таким образом, была получена следующая итерационная формула для определения постоянных коэффициентов поля перемещений берегов круговой трещины (33a):

$$d_{2j+k,2m+k}^{2n+k,2p+k} = \begin{cases} \frac{4q_{2n+k,2p+k}^c}{\pi H} \frac{I_{2(n+p+k)+1}}{(2n-2p+1)}, & j = m = p; \\ \frac{2n-2j+2}{2n-2j+1} d_{2j-2+k,2p+k}, & j > m = p; \\ 0, & j, m \neq p. \end{cases} \quad (49a)$$

По аналогии получена итерационная формула для определения постоянных коэффициентов перемещений в случае третьей и четвертой ветвей нагружения (33б):

$$e_{2j-k,2m-k}^{2n-k,2p-k} = \begin{cases} \frac{4q_{2n-k,2p-k}^s}{\pi H} \frac{I_{2(n+p-k)+1}}{(2n-2p+1)}, & j = m = p; \\ \frac{2n-2j+2}{2n-2j+1} e_{2j-2-k,2p-k}, & j > m = p; \\ 0, & j, m \neq p. \end{cases} \quad (49b)$$

С учетом (40) искомое решение для поля перемещений круговой трещины под действием первой или второй ветвей полиномиального нагружения (5а) имеет следующий вид:

$$W_{2n+k,2p+k}(\rho, \varphi) = a\sqrt{1-\rho^2} \cos(2p+k)\varphi \sum_{j=p}^n d_{2j+k,2p+k}^{2n+k,2p+k} \rho^{2j+k}, \quad (50a)$$

в случае третьей и четвертой ветвей нагружения (5б) –

$$W_{2n-k,2p-k}(\rho, \varphi) = a\sqrt{1-\rho^2} \sin(2p-k)\varphi \sum_{j=p}^n e_{2j-k,2p-k}^{2n-k,2p-k} \rho^{2j-k}. \quad (50б)$$

Отметим, что выражения (50) получены с учетом изменения формы трещины в неоднородном поле напряжений (34). Пренебрежение происходящим при этом изменением поля напряжений приводит к существенным ошибкам, как, например, в решении [15] для круговой трещины под действием симметричной полиномиальной нагрузки.

Как и выражения (33), формулы (50) представляют собой перемещения одного берега трещины. Для получения полного поля перемещений необходимо удвоить полученные результаты.

6. Примеры расчета КИН и перемещений берегов трещины.

6.1. *Решение для КИН.* В качестве примера рассмотрим аналитическое решение КИН для двух полиномов 3-й степени, симметричных относительно оси y (вторая ветвь нагружения):

$$P^1 = \left(\frac{x}{b}\right)^3 = \rho^3 \cos^3 \varphi; \quad (51a)$$

$$P^2 = \left(\frac{y}{a}\right)^2 \left(\frac{x}{b}\right) = \rho^3 \sin^2 \varphi \cos \varphi. \quad (51б)$$

Для удобства данные выражения представим в виде

$$P^i = \rho^3 (q_{31}^i \cos \varphi + q_{33}^i \cos 3\varphi), \quad i = 1, 2, \quad (52)$$

где $i = 1, 2$ для случаев нагружения (51а) и (51б) соответственно.

При этом КИН будет равен

$$\bar{K}_I^i(t) = \bar{K}_{I_{31}}^i(t) + \bar{K}_{I_{33}}^i(t). \quad (53)$$

Далее, используя (27) с учетом (28), (29) и (22), получаем искомое решение для КИН в случае эллиптической трещины:

$$\bar{K}_1^i(t) = \frac{2I_5}{7} \{ \cos t [7q_{31}^i (\varepsilon_{11})^2 + 2q_{31}^i (\varepsilon_{31})^2 + 6q_{33}^i \varepsilon_{31} \varepsilon_{33}] + \cos 3t [2q_{31}^i \varepsilon_{31} \varepsilon_{33} + 6q_{33}^i (\varepsilon_{33})^2] \}, \quad (54)$$

где $I_5 = 8/15$ (см. (23)). Заметим, что для второй ветви нагружения $k = 1$, а из (22) следует $a_{1,0}^3 = -4\varepsilon_{3,1}$. Коэффициенты ε_{ij} определяются согласно (17):

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{\beta_{11}}; \quad \varepsilon_{31} = -\frac{\beta_{31}}{\beta_{11}\beta_{33}}; \quad \varepsilon_{33} = -\frac{1}{\beta_{33}}. \quad (55)$$

В случае действия нагрузки вида (51а) полагаем $q_{31} = 0,75$, $q_{33} = 0,25$. С учетом (55) и (11) искомое решение (54) для КИН примет следующий вид:

$$\bar{K}_1^1(t) = \frac{3k^2}{10} \left(\frac{2}{\Phi_1(k)} - \frac{\Phi_3(k)\Phi_4(k)}{\Phi_1(k)\Phi_2(k)} \right) \cos t + \frac{3k^4}{2} \frac{\Phi_4(k)}{\Phi_2(k)} \cos 3t. \quad (56a)$$

Аналогично для нагружения (51б), принимая $q_{31} = 0,25$, $q_{33} = -0,25$, получаем

$$\bar{K}_1^2(t) = \frac{k^2}{10} \left(\frac{2}{\Phi_1(k)} + \frac{\Phi_3(k)\Phi_5(k)}{\Phi_1(k)\Phi_2(k)} \right) \cos t - \frac{k^4}{2} \frac{\Phi_5(k)}{\Phi_2(k)} \cos 3t. \quad (56б)$$

Здесь $k^2 = 1 - \alpha^2$;

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(k) = (1 - k^2)K + (2k^2 - 1)E; \\ \Phi_2(k) = (8k^8 - 63k^6 + 114k^4 - 71k^2 + 12)K^2 + \\ \quad + (32k^8 - 64k^6 + 151k^4 - 119k^2 + 12)E^2 - \\ \quad - (16k^8 - 79k^6 + 146k^4 - 95k^2 + 12)2EK; \\ \Phi_3(k) = (2k^4 + 3k^2 - 8)E - (k^4 + 7k^2 - 8)K; \\ \Phi_4(k) = (2k^4 - 2k^2 + 2)E - (k^4 - 3k^2 + 2)K; \\ \Phi_5(k) = (8k^4 - 3k^2 - 2)E - (4k^4 - 2k^2 - 2)K, \end{array} \right. \quad (57)$$

где $K = K(k)$, $E = E(k)$ – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Решения для КИН в случае окружной трещины ($\alpha = 1,0$) при заданных случаях нагружения соответственно равны

$$\bar{K}_1^1(t) = \frac{4}{35\pi} (7 \cos t + 2 \cos 3t); \quad (58a)$$

$$\bar{K}_1^2(t) = \frac{4}{105\pi} (7 \cos t - 6 \cos 3t). \quad (58б)$$

Результаты расчета КИН согласно (56) и (58), полученные в двух точках контура трещины для разных отношений α полуосей трещины, представлены в таблице.

Безразмерные КИН при нагружении (51а) и (51б)

t , град	$\alpha = a/b$	$\bar{K}_1^1(t)$	$\bar{K}_1^2(t)$
0	1,0	0,32740	0,01213
	0,8	0,38948	0,01551
	0,6	0,47735	0,01928
	0,5	0,53575	0,02089
	0,2	0,80350	0,01663
45	1,0	0,12862	0,11147
	0,8	0,15415	0,12304
	0,6	0,18922	0,13650
	0,5	0,21158	0,14395
	0,2	0,30172	0,16752

Полученные аналитические значения с точностью до шестого знака совпадают с результатами, определенными по методу Бородачева [8] путем численного интегрирования обобщенных потенциалов эллиптического диска.

6.2. Поле перемещений берегов трещины при полиномиальном законе нагружения 2-й степени. Рассмотрим полиномиальное нагружение вида

$$q_{2,0}(\rho, \varphi) = q_{2,0} \rho^2; \quad (59а)$$

$$q_{2,2}(\rho, \varphi) = q_{2,2} \rho^2 \cos^2 \varphi. \quad (59б)$$

Поле перемещений при этом представляется согласно (33а) так:

$$W_{2,i}(\rho, \varphi) = a \sqrt{1 - \rho^2} (d_{0,0}^{2,i} + d_{2,0}^{2,i} \rho^2 + d_{2,2}^{2,i} \rho^2 \cos^2 \varphi), \quad i = 0, 2. \quad (60)$$

Искомые постоянные коэффициенты получим согласно (42) в виде

$$d_{0,0}^{2,i} = \frac{h_{0,0}^{2,i}}{3}; \quad d_{2,0}^{2,i} = h_{2,0}^{2,i} + 2d_{0,0}^{2,i}; \quad d_{2,2}^{2,i} = h_{2,2}^{2,i}. \quad (61)$$

Коэффициенты $h_{2j,2p}^{2,i}$ с учетом (41), (29) и (22) (откуда $a_{0,0}^2 = -2\varepsilon_{2,0}$) запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
 h_{0,0}^{2,0} &= \frac{16}{15} \frac{q_{2,0}}{H} [5(\varepsilon_{0,0})^2 - 4(\varepsilon_{2,0})^2]; & h_{2,0}^{2,0} &= \frac{32}{5} \frac{q_{2,0}}{H} (\varepsilon_{2,0})^2; \\
 h_{2,2}^{2,0} &= \frac{32}{15} \frac{q_{2,0}}{H} \varepsilon_{2,0} \varepsilon_{2,2}; & h_{0,0}^{2,2} &= -\frac{64}{15} \frac{q_{2,2}}{H} \varepsilon_{2,0} \varepsilon_{2,2}; \\
 h_{2,0}^{2,2} &= \frac{32}{5} \frac{q_{2,2}}{H} \varepsilon_{2,0} \varepsilon_{2,2}; & h_{2,2}^{2,2} &= \frac{32}{15} \frac{q_{2,2}}{H} (\varepsilon_{2,2})^2.
 \end{aligned} \tag{62}$$

С учетом (62), а также (17) и (11) получим выражения для искомым коэффициентов (61):

$$\begin{aligned}
 d_{0,0}^{2,0} &= \frac{4}{3} \frac{q_{2,0}}{H} \frac{\Delta_2(k)}{\Delta_1(k)E(k)}; & d_{2,0}^{2,0} &= \frac{2}{3} \frac{q_{2,0}}{H} \frac{3(\Delta_3(k))^2 + 4\Delta_2(k)}{\Delta_1(k)E(k)}; \\
 d_{2,2}^{2,0} &= -2k^2 \frac{q_{2,0}}{H} \frac{\Delta_3(k)}{\Delta_1(k)};
 \end{aligned} \tag{63a}$$

$$\begin{aligned}
 d_{0,0}^{2,2} &= \frac{4}{3} \frac{q_{2,2}}{H} \frac{k^2 \Delta_3(k)}{\Delta_1(k)}; & d_{2,0}^{2,2} &= -\frac{10}{3} \frac{q_{2,2}}{H} \frac{k^2 \Delta_3(k)}{\Delta_1(k)}; \\
 d_{2,2}^{2,2} &= 6 \frac{q_{2,2}}{H} k^4 \frac{E(k)}{\Delta_1(k)},
 \end{aligned} \tag{63b}$$

где

$$\Delta_1(k) = E^2(4k^4 + 11k^2 - 11) - 5K^2(1 - k^2)^2 + 8EK(k^4 - 3k^2 + 2);$$

$$\Delta_2(k) = E^2(k^4 + 5k^2 - 5) - 3K^2(1 - k^2)^2 + 4EK(k^4 - 3k^2 + 2);$$

$$\Delta_3(k) = 2K(1 - k^2) - E(2 - k^2).$$

Заметим, что эти коэффициенты взаимосвязаны с эквивалентными коэффициентами $q_{m,n}^{i,j}$, полученными ранее (см. в [11] (45)). Например,

$$\begin{aligned}
 q_{0,0}^{0,2} &= \frac{(d_{0,0}^{2,0} + d_{0,0}^{2,2})}{4}; & q_{2,0}^{0,2} &= \frac{(d_{2,0}^{2,0} + d_{2,0}^{2,2}) - (d_{2,2}^{2,0} + d_{2,2}^{2,2})}{4}; \\
 q_{0,2}^{0,2} &= \frac{(d_{2,0}^{2,0} + d_{2,0}^{2,2}) + (d_{2,2}^{2,0} + d_{2,2}^{2,2})}{4}.
 \end{aligned} \tag{64}$$

Это позволило найти ошибку в записи коэффициента $q_{0,2}^{0,2}$, допущенную в [11] (см. в [11] (45f)). Правильное выражение с использованием оригинальных обозначений указанной работы таково:

$$q_{0,2} = \frac{E^2(2k^4 + 6k^2 - 2) + EK(1 - k^2)(2 - 5k^2)}{3E\Delta(k)}, \quad (65)$$

где

$$\Delta(k) = \frac{\Delta_1(k)}{2}.$$

Выводы

1. Модифицирована существующая методика [11] получения решения для весовой функции и КИН. При этом в общем разложении весовой функции неизвестные функции A_n и B_n представляются в виде разложения в ряды относительно тригонометрических функций косинуса или синуса.

2. Предложен оригинальный подход к определению нормальных перемещений берегов трещины при полиномиальном распределении напряжений, в котором используются значения для весовой функции и K_I , а также метод трансляции трещин в неоднородном поле напряжений. Получены общие решения для перемещений берегов эллиптической и круговой трещин нормального отрыва.

3. Разработан эффективный алгоритм расчета значений КИН и перемещений берегов трещины, позволяющий численно получить решение для любой степени полиномиальной нагрузки. Получены аналитические формулы расчета K_I для полиномиального закона нагружения 3-й степени и поля перемещений берегов трещины для симметричного нагружения 2-й степени.

Резюме

Розглянуто внутрішню еліптичну тріщину нормального відриву в необмеженому тілі. Модифіковано запропоновану раніше методику визначення вагової функції та коефіцієнта інтенсивності напружень. Отримано аналітичні та чисельні значення коефіцієнта інтенсивності напружень вздовж фронту тріщини для різних випадків поліноміального закону навантаження.

Запропоновано підхід до визначення переміщень берегів тріщини за значеннями коефіцієнта інтенсивності напружень, у якому використовуються рівняння енергетичного балансу Райса, теорема Дайсона і теорія трансляції тріщин у неоднорідному полі напружень. Одержано замкнений вираз для переміщень берегів еліптичної тріщини при поліноміальному законі навантаження довільного ступеня, котрий можна використати в розв'язку просторових задач теорії пружності з тріщинами.

1. *Shah R. C. and Kobayashi A. S.* Stress intensity factors for an elliptical crack approaching the surface of a semi-infinite solid // *Int. J. Fract.* – 1973. – **9**. – P. 133 – 146.
2. *Nishioka T. and Atluri S. N.* Analytical solution for embedded elliptical cracks and finite element alternating method for elliptical surface cracks, subjected to arbitrary loading // *Eng. Fract. Mech.* – 1983. – **17**. – P. 247 – 268.

3. *Партон В. З., Перлин П. И.* Интегральные уравнения теории упругости. – М.: Наука, 1977. – 340 с.
4. *Green A. E. and Sneddon I. N.* The distribution of stress in the neighborhood of a flat elliptical crack in an elastic solid // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1950. – **46**. – P. 159 – 164.
5. *Segedin C. M.* Some Three-Dimensional Mixed Boundary-Value Problems in Elasticity // Report 67-3. Dept. of Aer. Astr., Univ. Washington, 1967. – 35 p.
6. *Shah R. C. and Kobayashi A. S.* Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading // Eng. Fract. Mech. – 1971. – **3**. – P. 71 – 96.
7. *Vijayakumar K. and Athuri S. N.* An embedded elliptical flaw in an infinite solid, subjected to arbitrary crack-face tractions // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1981. – **48**. – P. 88 – 96.
8. *Бородачев А. Н.* Определение коэффициентов интенсивности напряжений для плоской эллиптической трещины при произвольных полиномиальных граничных условиях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 2. – С. 63 – 69.
9. *Dyson F. W.* The potentials of ellipsoids of variable densities // Quart. J. Pure Appl. Math. – 1891. – **25**. – P. 259 – 288.
10. *Roy A. and Saha T. K.* Weight function for an elliptic crack in an infinite medium. I. Normal loading // Int. J. Fract. – 2000. – **103**. – P. 227 – 241.
11. *Orynyak I. V.* Method of translations for a mode I elliptic crack in an infinite body. Part II: Expansion of the fundamental solution into a series // Int. J. Solids Struct. – 1998. – **35**, No. 23. – P. 3043 – 3052.
12. *Orynyak I. V.* Method of translations for a mode I elliptic crack in an infinite body. Part I: Polynomial loading // Ibid. – P. 3029 – 3042.
13. *Oore M. and Burns D. J.* Estimation of stress intensity factors for embedded irregular cracks subjected to arbitrary normal stress fields // Trans. ASME. J. Press. Vessel Technol. – 1980. – No. 2. – P. 202 – 211.
14. *Rice J. R.* Some remarks on elastic crack tip fields // Int. J. Solids Struct. – 1972. – **8**, No. 6. – P. 751 – 758.
15. *Martin P. A.* The discontinuity in the elastic displacement vector across a penny-shaped crack under arbitrary loads // J. Elast. – 1982. – **12**. – P. 201 – 218.

Поступила 27. 11. 2000

Determination of Reference Temperature T_0 for Steel JRQ in an Unirradiated State and Construction of Master Curve

A. Ballesteros,^a V. A. Strizhalo,^b É. U. Grinik,^c L. S. Novogradskii,^b L. I. Chirko,^c and M. P. Zemtsov^b

^a Tecnatom S.A., Madrid, Spain

^b Institute of Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine

^c Scientific Center "Institute for Nuclear Research," National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine

Определение эталонной температуры T_0 для стали JRQ и построение "Master curve"

А. Баллестерос^а, В. А. Стрижало^б, Э. У. Гриник^в, Л. С. Новогрудский^б, Л. И. Чирко^в, М. П. Земцов^б

^а "Теснатом S.A.", Мадрид, Испания

^б Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

^в Научный центр "Институт ядерных исследований" НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрены результаты исследования трещиностойкости корпусной реакторной стали JRQ и построена зависимость коэффициента интенсивности напряжений от температуры ($-196...+50^{\circ}\text{C}$), которая является так называемой "Master curve". При исследовании вязкости разрушения использовали малые компактные образцы толщиной $1/2T$, которые вырезали из заготовки стали JRQ размером $225 \times 198 \times 165$ мм, поставленной МАГАТЭ.

Испытания проводили в соответствии со стандартом ASTM E 1921-97 "Determination of Reference Temperature T_0 for Ferritic Steels in the Transition Range". Для уточнения температуры T_0 и выполнения необходимых расчетов проводили также испытания на ударную вязкость и динамические испытания по определению модулей упругости E и G в интервале температур $-196...+350^{\circ}\text{C}$.

Построена "Master curve" по результатам испытаний двух типов компактных образцов на различном оборудовании и определены ее доверительные интервалы для различных вероятностей.

Ключевые слова: вязкость разрушения, температура вязко-хрупкого перехода, J -интеграл, "Master curve", прочность.

Introduction. The known methods for obtaining reliable data on fracture toughness under conditions of plane deformation require tests to be conducted on long specimens and involve high consumption of hard-to-get materials. For reactor steels, for which it is necessary to determine the transition temperature

shift in the irradiated state as compared to the unirradiated one, the use of large-size specimens is unacceptable at all, and surveillance specimens are small in size and their tests involving the methods of nonlinear fracture mechanics are rather labor consuming and expensive. Employing Master Curve approach for ferritic steels enables obtaining reliable data and the temperature dependence of the crack-growth resistance variation at the lower boundary of transition over the wide temperature range by testing small specimens [1]. According to the recent standardizing documents, Master Curve is constructed on the basis of the results of testing small-size specimens at a single temperature value such that slow steady growth of a crack before the beginning of instability is practically precluded. This makes it possible to simplify considerably the procedure for determining the J -integral and to use the experimental basic approach of nonlinear fracture mechanics. Below we consider the results of determining the reference temperature T_0 and constructing Master Curve on the basis of the experiments performed for reactor steel in an unirradiated state.

Material and Specimens. Compact-tension specimens for the construction of Master Curve and standard Charpy specimens for the determination of brittle-to-ductile transition temperature were fabricated from blocks of steel JRQ with dimensions of $225 \times 198 \times 165$ mm, its chemical composition is given in Table 1.

T a b l e 1

Chemical Composition of Steel JRQ

C	Si	Mn	Ni	Mo	Cr	P	Cu	S	Al	V
0.18%	0.24%	1.42%	0.84%	0.51%	0.12%	0.017%	0.14%	0.004%	0.014%	0.002%

For static fracture toughness tests we used 1/2T CT specimens of two types (Fig. 1), whose orientation corresponded to the T–L direction [2] of the JRQ steel billet. These specimens differed in dimensions and design of the attachment points of the displacement transducer. Specimens of the second type had side notches made after growing an initial fatigue crack (see Fig. 1b). The dimensions of the second type specimens corresponded to those of the surveillance specimens installed in reactor pressure vessels of the nuclear power plants in Ukraine. Specimens of these two types were tested to assess how differences in dimensions and design affect the magnitude of the reference temperature and the trend of Master Curve for steel JRQ in an unirradiated state. Fracture toughness tests were performed in accordance with [1] at a temperature of $T_{28j} - 28$. The temperature T_{28j} was determined from the results of testing Charpy specimens ($10 \times 10 \times 55$ mm) using a two-column pendulum impact testing machine with a store of impact energy 300 J in the temperature range from -196°C to $+270^\circ\text{C}$.

The first type specimens (see Fig. 1a) were tested at a conventional laboratory of the Institute of Problems of Strength of the National Academy of Sciences of Ukraine using Instron-1126 testing machine with a hydromechanical converter with an ultimate load of 250 kN that allowed us to perform both stress- and strain-controlled tests. Most of the second type specimens was tested using an electromechanically driven Instron-8500 testing machine with an ultimate load of 100 kN equipped with remote control and installed in a hot chamber of the

Institute for Nuclear Research of the National Academy of Sciences of Ukraine to correspond to the requirements of the ENUCRA program (see Fig. 1b). Only some of those specimens were tested in the Instron-1126 testing machine for comparison.

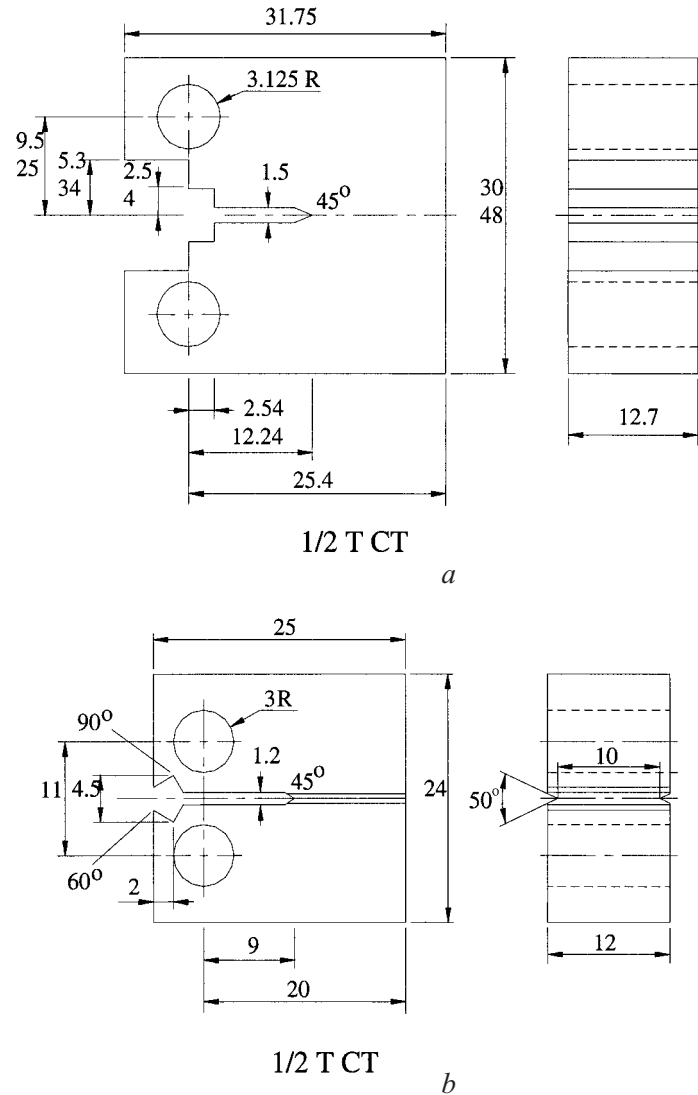


Fig. 1. Dimensions of 1/2T CT specimens of the first (a) and second (b) types in mm.

In impact toughness testing the specimens were heated in an electrical resistance furnace, and cooled in a mixture of liquid nitrogen with alcohol. In fracture toughness testing using the Instron-1126 testing machine 1/2T CT specimens were cooled in a cryogenic chamber also using the mixture of liquid nitrogen with alcohol (see Fig. 1a), specimens of the second type tested in the hot chamber on the Instron-8500 testing machine were cooled in the vapors of nitrogen (see Fig. 1b). Both methods of cooling allowed obtaining a stable low temperature in the range under study.

The temperature was measured with thermometers and thermal converters, which had been put to metrological tests. For measuring loads and crack opening displacement, elements of the measurement systems (devices, gauges, and transducers) of the Instron testing machines were used that allowed determining loads and displacements to a high accuracy, and obtaining reliable $P-V$ diagrams. The procedure for measuring temperature, load and displacement, and also the technique for growing initial fatigue cracks met the requirements of [1].

To get a deep insight into the mechanical behavior of the steel investigated over the operating temperature range, and to obtain data on strength and elasticity characteristics essential in the determination of the load causing initial fatigue crack, and the limiting value of K_{Jc} and its current values with respect to the J -integral values, short-term strength tests were performed with an Instron testing machine and elasticity was determined by the dynamic method with the use of a special resonant equipment [3].

When testing short-term strength, standard five-fold specimens were employed with the working section 10 mm in diameter and 50 mm in length. The modulus of elasticity E and shear modulus G were found for cylindrical specimens 8 mm in diameter and 120 mm in length from their resonance frequency in bending and torsional vibrations, respectively.

Construction of Master Curve. The Master Curve concept is based on the results of fundamental investigations performed by Wallin [4, 5] and involves the following principles:

– probability of brittle fracture P_f for a specimen chosen arbitrarily from the batch is described by a three-parametric equation of Weibull [4]:

$$P_f = 1 - \exp \left[- \left(\frac{K_{Ic} - K_{\min}}{K_0 - K_{\min}} \right)^4 \right], \quad (1)$$

where K_0 is the scale parameter, whose magnitude is governed by the specimen thickness and test temperature, and K_{\min} is the least crack-growth resistance, whose magnitude according to [1] is assumed to be equal to $20 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$;

– the level of the crack-growth resistance depends on the specimen thickness and this relationship is described by the following formula [5]:

$$\frac{K_{Ic}^X - K_{\min}}{K_{Ic}^Y - K_{\min}} = \left(\frac{B_Y}{B_X} \right)^{1/4}, \quad (2)$$

where K_{Ic}^X and K_{Ic}^Y are the values of the stress intensity factors for specimens of thickness B_X and B_Y at the same probability of brittle fracture P_f ;

– the median value of the crack-growth resistance (at $P_f = -0.5$) as a function of the temperature for 1T CT specimens is described by the equation, which is the equation of Master Curve [1]:

$$K_{Jc(\text{med})} \approx 30 + 70 \exp[0.019(T - T_0)], \quad (3)$$

where T_0 is the reference temperature at which $K_{Jc(med)}$ is taken to be equal to $100 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ [1].

Using Eqs. (1)–(3) for specimens of any thickness at any fracture probability temperature dependences of the crack-growth resistance can be calculated from the results of testing the material for crack-growth resistance at a single temperature value. The procedure of such tests and regulating requirements for them are described in detail in [1]; they were used for obtaining the data considered in the present study.

The temperature at which the fracture toughness tests were performed was defined as

$$T = T_{28j} + C, \quad (4)$$

where $C = -28^\circ\text{C}$ for 1/2T specimens, and the temperature T_{28j} , as noted above, was determined from the results of impact toughness testing the Charpy specimens. The data obtained from such tests for the specimens with the L–T (along the rolling direction) and T–L (across the rolling direction) orientations are given in Fig. 2. As follows from these results, a considerable scatter of the impact toughness values is observed in the region of the brittle-to-ductile transition, that is indicative of instability of the property of the JRQ steel billet to resist brittle fracture that was also confirmed by the results of fracture toughness tests. The T_{28j} value was determined for the T–L orientation and amounted to -52°C . Thus, the crack-growth resistance tests according to the guidelines of [1] and on the basis of Eq. (4) should be carried out at the temperature $T = -80^\circ\text{C}$.

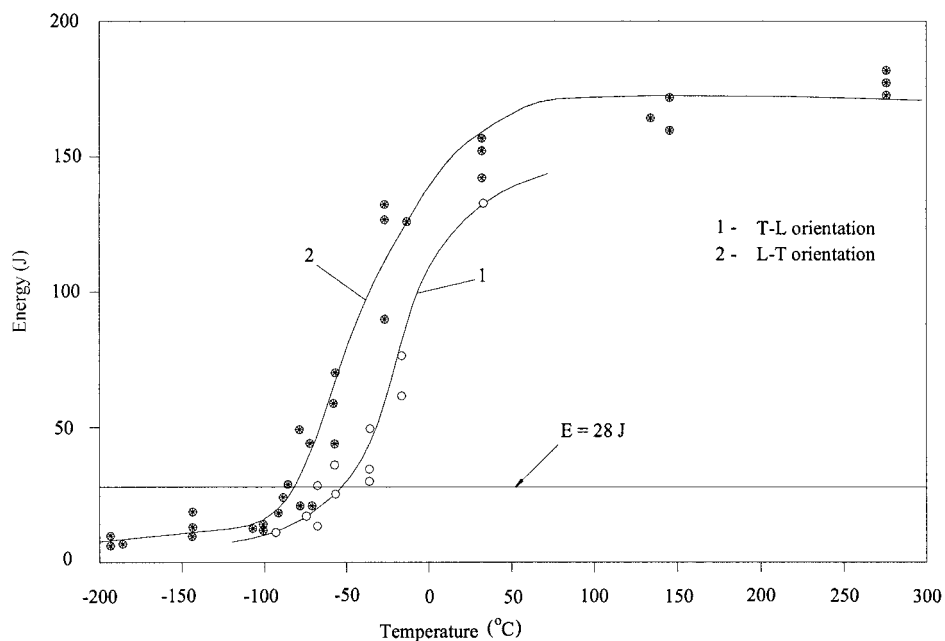


Fig. 2. Results of Charpy testing of unirradiated JRQ material.

To calculate the limiting value of the stress intensity factor at this temperature we used equation

$$K_{Jc(\text{limit})} = \sqrt{Eb_0\sigma_Y/30}, \tag{5}$$

where E is the modulus of elongation, b_0 is the ligament of the compact specimen $b_0 = W - a_0$, and σ_Y is the yield strength of the material at this temperature. The mechanical characteristics of JRQ steel obtained for the operating temperature range are given in Table 2, and the temperature dependences of the moduli E and G are illustrated in Fig. 3.

Table 2

Mechanical Characteristics of Steel JRQ

Temperature, °C	Ultimate strength σ_u , MPa	Yield strength σ_Y , MPa	Residual elongation δ , %
20	640.0	490.0	18.0
-80	790.0	630.0	18.5
-196	990.0	960.0	0.5

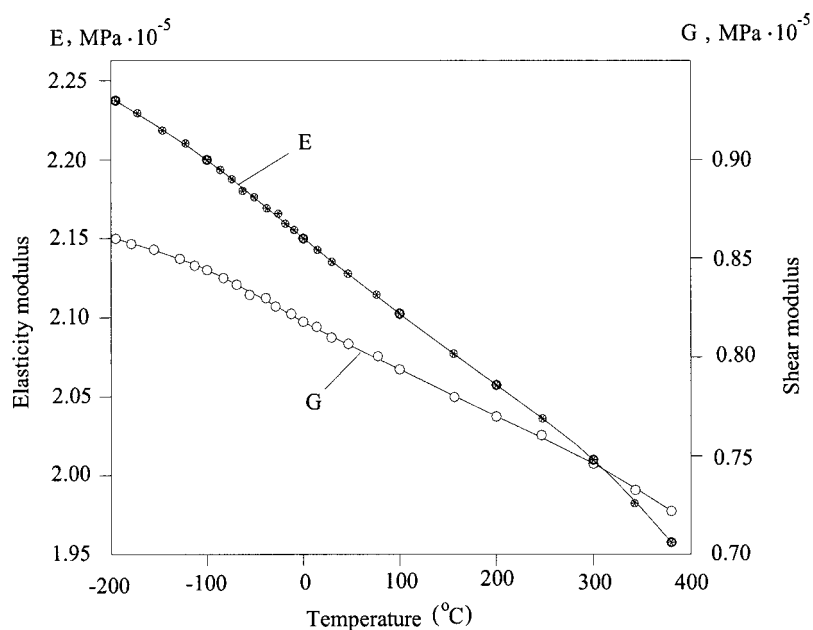


Fig. 3. Temperature dependences of the elasticity and shear moduli E and G .

It should be emphasized that the break of monotonicity of the curve trend was observed for the elastic modulus E in the region of the brittle-to-ductile transition temperatures that is indicative of abnormal changes in the structure of the material in this region as the temperature decreases.

For the values of E and σ_Y obtained at -80°C , $K_{Jc(\text{limit})} = 233.0 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$.

1/2T CT specimens were tested in the mixture of liquid nitrogen with alcohol or vapors of nitrogen at -80°C with a simultaneous recording of $P - V$ diagrams. From the results of processing the diagrams we determined the values of the J -integral as a sum of its elastic and plastic components:

$$J_c = J_e + J_p. \quad (6)$$

The elastic and plastic components were defined as

$$J_e = \frac{K_e^2}{E} \quad (7)$$

and

$$J_p = \frac{\eta A_p}{B b_0}, \quad (8)$$

respectively, where K_e is the value of the stress intensity factor determined by the known procedure [1], η is the coefficient dependent on the dimensions of the CT specimen b_0 and W , A_p is the work of plastic deformation determined from the corresponding area of the $P - V$ diagram, and B is the specimen thickness.

The quantity K_{Jc} was calculated for each individual specimen depending on the particular J_c value from the relation

$$K_{Jc} = \sqrt{J_c E}. \quad (9)$$

The values of J_c and K_{Jc} for qualification specimens of two types, which remained after the rejection performed according to the requirements of the standard [1], are listed in Tables 3, 4.

Table 3

The Values of Crack-Growth-Resistance Characteristics for the First Type Specimens at $T = -80^{\circ}\text{C}$

No	1	2	3	4	5	6	7	8
$J_c, \text{kJ/m}^2$	8.45	31.0	32.5	41.8	51.7	21.5	34.3	86.9
$K_{Jc}, \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	43.00	82.5	84.6	95.9	106.6	68.6	84.9	58.3

Table 4

The Values of Crack-Growth-Resistance Characteristics for the Second Type Specimens at $T = -80^{\circ}\text{C}$

No	1	2	3	4	5	6	7	8*	9*
$J_c, \text{kJ/m}^2$	23.7	27.2	68.1	22.3	14.1	28.6	16.5	25.1	50.0
$K_{Jc}, \text{MPa}\sqrt{\text{m}}$	72.2	77.4	122.4	70.1	55.6	75.6	60.2	74.1	104.9

* Specimens 8 and 9 were tested in the Instron-1126 testing machine using the mixture of alcohol with liquid nitrogen.

Master Curve was constructed and the temperature T_0 was determined for the 1T specimens. For this reason, on the basis of the data given in Tables 2 and 3, K_0 and $K_{Jc(\text{med})}$ were determined successively for specimens of thickness 1/2T and 1T from Eqs. (1) and (2). Below are given their values for the specimens of the first type:

$$K_{0(1/2T)} = \left[\frac{\sum_{i=1}^8 (K_{Jc(i)} - 20)}{N - 0.3068} \right]^{1/4} + 20 = 86.4 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}},$$

$$K_{0(1T)} = 20 + [K_{0(1/2T)} - 20] \left(\frac{B_i}{B_{(1T)}} \right)^{1/4} = 75.8 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}},$$

$$K_{Jc(1T)(\text{med})} = \frac{1}{4} [K_{0(1T)} - 20] [\ln(2)] + 20 = 70.9 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}},$$

and for the specimens of the second type:

$$K_{0(1/2T)} = \left[\frac{\sum_{i=1}^9 (K_{Jc(i)} - 20)}{9 - 0.3068} \right]^{1/4} + 20 = 90.1 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}},$$

$$K_{0(1T)} = 20 + [K_{0(1/2T)} - 20] \left(\frac{B_i}{B_{(1T)}} \right)^{1/4} = 74.9 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}},$$

$$K_{Jc(1T)(\text{med})} = \frac{1}{4} [K_{0(1T)} - 20] [\ln(2)] + 20 = 70.6 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}.$$

The magnitude of the reference temperature was determined from Eq. (3):

$$T_0 = T^* - \frac{1}{0.019} \ln \left[\frac{K_{Jc(1T)(\text{med})} - 30}{70} \right],$$

where $T^* = -80^\circ\text{C}$.

We obtained $T_0 = -51.7^\circ\text{C}$ for the specimens of the first type and $T_0 = -51.3^\circ\text{C}$ for those of the second type.

We assumed $T_0 = -52^\circ\text{C}$ for $K_{Jc} = 100 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$.

Thus, the final equation of Master Curve for unirradiated steel JRQ has the form

$$K_{Jc(\text{med})} = 30 + 70 \exp[0.019(T + 52)]. \quad (10)$$

Master Curve is depicted in Fig. 4; it is known that this curve corresponds to the 50% cumulative failure probability. Standard deviations for the T_0 value obtained with allowance for the statistical character of fracture of ferritic steel JRQ are defined as

$$\sigma = \frac{\beta}{\sqrt{N}}, \quad (11)$$

where N is the number of the qualification specimens and β is the coefficient dependent on the magnitude of $K_{Jc(\text{med})}$.

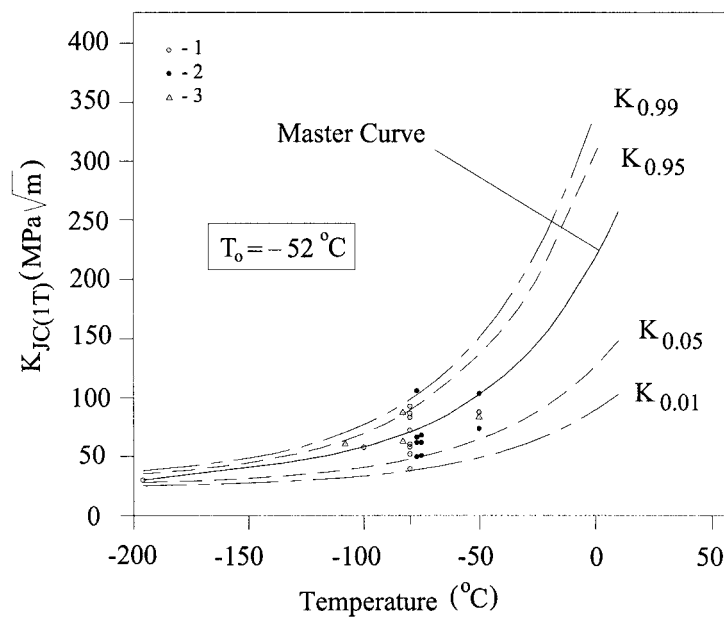


Fig. 4. “Master Curve” results obtained using JRQ materials: 1 – specimens I type, Instron-1126; 2 – specimens II type, Instron-8500; 3 – specimens II type, Instron-1126.

In our case, $N = 8$ and $\beta = 18.8$ for $K_{Jc(\text{med})} = 70.9 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$. Therefore, for the specimens of the first type, $\sigma = 6.6^\circ\text{C}$. For $K_{Jc(\text{med})} = 70.6 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$, $N = 9$ and $\beta = 18.8$. Therefore, for the specimens of the second type, $\sigma = 6.3^\circ\text{C}$.

The tolerance bounds are determined from the following equations based on the use of Eq. (1):

the lower 1% tolerance bound:

$$K_{Jc(0.01)} = 23.5 + 24.4 \exp[0.019(T - T_0)]; \quad (12)$$

the lower 5% tolerance bound:

$$K_{Jc(0.05)} = 25.2 + 36.6 \exp[0.019(T - T_0)]; \quad (13)$$

the upper 95% tolerance bound:

$$K_{Jc(0.95)} = 34.5 + 101.3 \exp[0.019(T - T_0)]; \quad (14)$$

the upper 99% tolerance bound:

$$K_{Jc(0.99)} = 36.1 + 112.8 \exp[0.019(T - T_0)]. \quad (15)$$

Figure 4 shows the curves corresponding to the above tolerances that bound the scatter range of the results of crack-growth resistance testing with a given failure probability when realizing the method of Master Curve. Within the scatter range of Master Curve points are marked that correspond to the values of K_{Jc} obtained for 1T CT specimens on the basis of the results of crack-growth testing 1/2T CT specimens of steel JRQ at -50°C , -80°C , -100°C , -110°C , and -196°C .

CONCLUSIONS

1. The equation of Master Curve for steel JRQ in an unirradiated state has the following form:

$$K_{Jc(\text{med})} = 30 + 70 \exp[0.019(T + 52)].$$

2. Reference temperatures determined for the two types of 1/2T CT specimens of steel JRQ are little different and amount to -51.7°C and -51.3°C , for the specimens of the first and second types, respectively.

3. The procedure for determining the reference temperature T_0 from testing small 1/2T CT specimens in the hot chamber was developed on the Instron-8500 testing machine within the framework of the ENUKRA program. It gives repeatable results that agree satisfactorily with those of testing using certified equipment of high accuracy on the basis of the Instron-1126 testing machine under comfortable (i.e., without remote control) laboratory conditions. Therefore, the procedure for fracture toughness testing within the framework of the ENUCRA program can be treated as efficient and dependable, and the results obtained employing this procedure can be considered as reliable.

Резюме

Розглянуто результати дослідження корпусної реакторної сталі JRQ і побудовано залежність коефіцієнта інтенсивності напружень від температури ($-196\dots+50^\circ\text{C}$), яка є так званою “Master curve”. При дослідженні в’язкості руйнування використовували малі компактні зразки товщиною 1/2Т, що вирізали з поставляємої МАГАТЕ заготовки сталі JRQ розміром $225 \times 198 \times 165$ мм.

Випробування проводили у відповідності до стандарту ASTM E 1921-97 “Determination of Reference Temperature T_0 for Ferritic Steels in the Transition Range”. Для уточнювання температури T_0 і виконання необхідних розрахунків проводили також випробування на ударну в’язкість та динамічні

випробування по визначенню модулів пружності E і G в інтервалі температур $-196...+350^{\circ}\text{C}$.

Побудовано "Master curve" за результатами випробувань двох типів компактних зразків на різному обладнанні і визначено її довірчі інтервали для різних імовірностей.

1. *ASTM E 1921-97*. Standard Test Method for Determination of Reference Temperature T_0 for Ferritic Steels in the Transition Range // Annual Book of ASTM Standards. – 1998. – Vol. 03.01. – P. 1068 – 1084.
2. *ASTM E 399-74*. Standard Test Method for Plane Strain Fracture Toughness of Metallic Materials // Annual Book of ASTM Standards. – 1974. – Vol. 03.01. – P. 509 – 539.
3. *All-Union State Standard 25156-82* "Metals. Dynamic Method for Determining Characteristics of Elasticity."
4. *Wallin K.* The scatter in K_{Ic} results // Eng. Fract. Mech. – 1984. – **19**. – P. 1085 – 1093.
5. *Wallin K.* The size effect in K_{Ic} results // Ibid. – 1985. – **22**. – P. 149 – 163.

Received 26. 09. 2001

Вибрационные характеристики усталостного повреждения стержневых элементов конструкций

А. П. Бовсуновский, В. В. Матвеев

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Рассматриваются свободные колебания упругого консольного стержня с краевой закрывающейся трещиной. Трещина моделируется упругим шарниром, податливость которого полагается конечной и определяется исходя из энергетического критерия эквивалентности. Построен алгоритм последовательного расчета собственных форм колебаний стержня для каждого из ограниченного числа циклов его колебаний. Показано, что при раскрытии и закрытии трещины возникают также другие формы колебаний стержня, отличные от изначально задаваемой, исследованы особенности их проявления.

Выполнен анализ чувствительности вибрационных характеристик повреждения, определяемых на основе оценки нелинейных искажений формы волны перемещения, ускорения и деформации сечений стержня с закрывающейся трещиной.

Ключевые слова: консольный стержень, изгибные колебания, трещина усталости, собственная частота и форма, закрывающаяся трещина, механика разрушения, гармонический анализ.

Введение. Некоторые механические конструкции в реальных условиях эксплуатации подвергаются совместному или раздельному действию динамической нагрузки, температуры и агрессивной среды, что приводит к возникновению усталостных и термоусталостных трещин, коррозионному растрескиванию и другим видам повреждений. Непосредственное визуальное обнаружение таких повреждений во многих случаях затруднено или невозможно, а использование локальных неразрушающих методов требует больших затрат времени и зачастую оказывается неэффективным.

Перспективным в этой связи является использование вибрационных методов диагностики повреждения, основанных на взаимосвязи вибрационных характеристик (например, собственные частоты [1–3] и формы [4] колебаний) или особенностей поведения нелинейной колебательной системы (например, нелинейные искажения волны колебаний [5–8], возникновение суб- и суперрезонансных колебаний [7–9], смещение антирезонансных частот [10]) с параметрами (размеры и местоположение) повреждения.

Анализ изменения вибрационных характеристик реальных конструкций при возникновении повреждения – сложная задача. Однако она значительно упрощается, если конструкцию или ее элементы с достаточной для инженерной практики точностью представить в виде стержневой колебательной системы с краевыми условиями и условиями нагружения, близкими к реальным.

Особое внимание во многих работах уделяют конструкциям, при вибрации которых трещина открыта на одном полуцикле колебаний и закрыта на другом. Такая трещина называется закрывающейся и обуславливает существо-

венную нелинейность колебательной системы. Оценка этой нелинейности позволяет расширить круг возможных вибрационных характеристик повреждения (ВХП).

Наиболее просто характеристики колебаний какого-либо стержневого элемента определяются в предположении, что трещина не изменяет его форму колебаний. Это позволяет при заданной форме колебаний элемента рассматривать его как систему с одной степенью свободы [11]. Получаемое в этом случае решение, строго говоря, справедливо при относительно малой глубине трещины.

Ранее [12] получено решение задачи об изгибных колебаниях консольного стержня с закрывающейся трещиной для первого цикла колебаний и показано, что при раскрытии трещины возникают и другие, отличные от изначально задаваемой, собственные формы колебаний стержня. Такой подход к решению задачи позволяет рассматривать не только первый, но и последующие циклы колебаний. Задача настоящей работы состояла в построении алгоритма расчета собственных форм колебаний стержня на каждом из ограниченного числа циклов колебаний, исследовании на его основе особенностей возникновения сопутствующих форм колебаний и сравнительной оценке чувствительности ряда ВХП. В качестве ВХП рассмотрены собственные частоты и формы колебаний, уровень нелинейных искажений формы волны перемещения, ускорения и деформации.

Методика расчета. Решение задачи об изгибных колебаниях стержня с закрывающейся краевой трещиной строится на основе синтеза решений дифференциальных уравнений, описывающих свободные поперечные колебания стержня Бернулли–Эйлера без трещины и с открытой трещиной [12]. Полуцикл колебаний при закрытой трещине описывается уравнением

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x)(P_i \sin \omega_i t + R_i \cos \omega_i t), \quad (1)$$

где $w_i(x)$, ω_i — соответственно собственные формы и угловые частоты колебаний стержня; P_i , R_i — коэффициенты, подлежащие определению; i — номер формы колебаний.

На полуцикле колебаний, когда трещина открыта, стержень моделируется двумя стержнями, соединенными между собой упругим шарниром, имеющим некоторую угловую податливость и расположенным на расстоянии L_T от заделки (рис. 1). Этот полуцикл колебаний описывается уравнением

$$y_{Tj}(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} w_{ij}(x)(P_{Ti} \sin \omega_{oi} t + R_{Ti} \cos \omega_{oi} t), \quad (2)$$

где $w_{ij}(x)$ — собственные формы колебаний стержня на j -м участке ($j = 1, 2$); ω_{oi} — собственные угловые частоты колебаний стержня с открытой трещиной; P_{Ti} , R_{Ti} — коэффициенты, подлежащие определению.

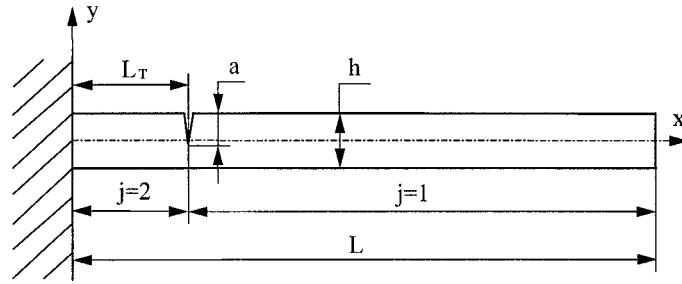


Рис. 1. Схема консольного стержня с краевой закрывающейся трещиной.

Краевые условия для угла поворота $\theta_{ij}(x)$, изгибающего момента $M_{ij}(x)$ и поперечной силы $Q_{ij}(x)$ и условия сопряжения участков стержня имеют вид

$$\begin{aligned} M_{i1}(L) &= I_m \omega_{oi}^2 k_{oi} [A_{i1}V(k_{oi}L) + B_{i1}S(k_{oi}L) + C_{i1}T(k_{oi}L) + D_{i1}U(k_{oi}L)]; \\ Q_{i1}(L) &= -m_L \omega_{oi}^2 [A_{i1}S(k_{oi}L) + B_{i1}T(k_{oi}L) + C_{i1}U(k_{oi}L) + D_{i1}V(k_{oi}L)]; \\ w_{i1}(L_T) &= w_{i2}(L_T); \quad \theta_{i1}(L_T) - \theta_{i2}(L_T) = \delta_T M_{i1}(L_T); \quad M_{i1}(L_T) = M_{i2}(L_T); \\ Q_{i1}(L_T) &= Q_{i2}(L_T); \quad w_{i2}(0) = 0; \quad \theta_{i2}(0) = 0, \end{aligned}$$

где $k_{oi}^4 = \omega_{oi}^2 \rho F / EI$; δ_T – изменение податливости сечения с трещиной; L – длина стержня; E, ρ соответственно модуль упругости и плотность материала стержня; I, F соответственно момент инерции и площадь поперечного сечения стержня; m_L – масса груза на конце стержня; I_m – момент инерции массы; S, T, U, V – функции Крылова.

Частотное уравнение, определяющее собственные частоты колебаний стержня с открытой трещиной, запишем следующим образом:

$$\begin{vmatrix} U(\varphi_i) - q_0 V(\varphi_i) & V(\varphi_i) - q_0 S(\varphi_i) & S(\varphi_i) - q_0 T(\varphi_i) & T(\varphi_i) - q_0 U(\varphi_i) & 0 & 0 \\ T(\varphi_i) + g_0 S(\varphi_i) & U(\varphi_i) + g_0 T(\varphi_i) & V(\varphi_i) + g_0 U(\varphi_i) & S(\varphi_i) + g_0 V(\varphi_i) & 0 & 0 \\ S(\psi_i) & T(\psi_i) & U(\psi_i) & V(\psi_i) & -S(\psi_i) & -T(\psi_i) \\ V(\psi_i) - r_0 U(\psi_i) & S(\psi_i) - r_0 V(\psi_i) & T(\psi_i) - r_0 S(\psi_i) & U(\psi_i) - r_0 T(\psi_i) & -T(\psi_i) & -U(\psi_i) \\ U(\psi_i) & V(\psi_i) & S(\psi_i) & T(\psi_i) & -S(\psi_i) & -T(\psi_i) \\ T(\psi_i) & U(\psi_i) & V(\psi_i) & S(\psi_i) & -V(\psi_i) & -S(\psi_i) \end{vmatrix} = 0, \quad (3)$$

где $\varphi_i = k_{oi}L$; $\psi_i = L_T \varphi_i / L$; $q_0 = I_m \varphi_i^3 / \rho FL^3$; $g_0 = m_L \varphi_i / \rho FL$; $r_0 = EI \delta_T \varphi_i / L$.

Изменение податливости упругого шарнира определялось с использованием подходов линейной механики разрушения и энергетических соотношений [13]:

$$\delta_T(\gamma) = \frac{8,82[(1-\gamma)^6 - 3(1-\gamma)^2 + 2]}{(1-\gamma)^2 bh^2 E}. \quad (4)$$

Здесь $\gamma = a / h$ – относительная глубина трещины, где a – глубина трещины; h – высота поперечного сечения. При выводе формулы (4) использовано выражение для определения коэффициента интенсивности напряжений (КИН) при изгибе полосы с боковым вырезом, предложенное Черепановым [14]:

$$K_I = \frac{4,2 M}{bh^{3/2}} [(1-\gamma)^{-3} - (1-\gamma)^3]^{1/2}. \quad (5)$$

Заметим, что результаты расчетов собственных частот и форм (до пятой включительно) колебаний консольного стержня с представленной выше моделью трещины в виде упругого шарнира и с более сложной моделью в виде короткой секции с уменьшенным моментом инерции сечения [12] оказались практически одинаковыми. В обоих случаях для оценки обусловленного наличием трещины изменения потенциальной энергии деформации стержня использовали выражение (5).

Выбор выражения для определения КИН влияет на результаты расчета собственных частот и форм колебаний по причине различия значений КИН, вычисленных по разным формулам. Например, различие между значениями КИН, определенными по формуле (4) из [15] и по формуле (5), достигает 13,2%. Таким образом, адекватность моделирования колебаний стержня с трещиной при использовании энергетического подхода зависит не столько от типа модели трещины, сколько от выбора выражения для КИН. В настоящей работе предпочтение отдано выражению (5), что обосновано ранее [12].

Допустим, что на первом и последующих нечетных полуциклах колебаний трещина закрыта ($n = 1, 3, 5, \dots$), а на четных – открыта ($n = 2, 4, 6, \dots$). Начальные условия для перемещения, скорости, угла поворота и скорости изменения угла поворота сечений стержня на 1-м полуцикле колебаний ($n=1$) в момент времени $t_1=0$ приняты соответственно следующими: $y_1(x) = 0$; $v_1(x) = \omega_s w_s(x)$; $\theta_1(L) = 0$; $[\partial \theta_1(L, t) / \partial t]_{t_1=0} = \omega_s \theta_s(L)$, где s – номер начальной задаваемой (исходной) формы колебаний. Другие формы колебаний ($i \neq s$), возникающие в момент открытия или закрытия трещины, назовем сопутствующими. При указанных начальных условиях $P_{1,s} = 1$ и $P_{1,i \neq s} = R_{1,i \neq s} = 0$.

На четных полуциклах колебаний коэффициенты $P_{n,ti}$ и $R_{n,ti}$ определяются по формулам

$$P_{n,ti} = \frac{\omega_{oi} G_{n,1} \sin \omega_{oi} t_n + G_{n,2} \cos \omega_{oi} t_n}{\omega_{oi} \left[\int_0^{L_T} m w_{i2}^2(x) dx + \int_{L_T}^L m w_{i1}^2(x) dx + m_L w_{i1}^2(L) + I_m \theta_{i1}^2(L) \right]}; \quad (6)$$

$$R_{n, \tau i} = \frac{\omega_{oi} G_{n,1} \sin \omega_{oi} t_n - G_{n,2} \cos \omega_{oi} t_n}{\omega_{oi} \left[\int_0^{L_\tau} m w_{i2}^2(x) dx + \int_{L_\tau}^L m w_{i1}^2(x) dx + m_L w_{i1}^2(L) + I_m \theta_{i1}^2(L) \right]}, \quad (7)$$

где $m = \rho F$ — интенсивность массы стержня;

$$\begin{aligned} G_{n,1} &= \int_0^{L_\tau} m y_{n-1}(x) w_{i2}(x) dx + \int_{L_\tau}^L m y_{n-1}(x) w_{i1}(x) dx + \\ &+ m_L y_{n-1}(L) w_{i1}(L) + I_m \theta_{n-1}(L) \theta_{i1}(L), \\ G_{n,2} &= \int_0^{L_\tau} m v_{n-1}(x) w_{i2}(x) dx + \int_{L_\tau}^L m v_{n-1}(x) w_{i1}(x) dx + \\ &+ m_L v_{n-1}(L) w_{i1}(L) + I_m \left[\frac{\partial \theta_{n-1}(L, t)}{\partial t} \right]_{t_n} \theta_{i1}(L) \end{aligned}$$

при соответствующих начальных условиях

$$\begin{aligned} y_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} w_i(x) (P_{n-1,i} \sin \omega_i t_n + R_{n-1,i} \cos \omega_i t_n); \\ v_{n-1}(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i w_i(x) (P_{n-1,i} \cos \omega_i t_n - R_{n-1,i} \sin \omega_i t_n); \\ \theta_{n-1}(L) &= \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(L) (P_{n-1,i} \sin \omega_i t_n + R_{n-1,i} \cos \omega_i t_n); \\ \left[\frac{\partial \theta_{n-1}(L, t)}{\partial t} \right]_{t_n} &= \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \theta_i(L) (P_{n-1,i} \cos \omega_i t_n - R_{n-1,i} \sin \omega_i t_n), \end{aligned}$$

определяемых в моменты времени, когда упругая линия исходной формы колебаний стержня переходит через нейтральное положение:

$$t_n = \frac{n \pi}{2 \omega_s} + \left(\frac{n-2}{2} \right) \frac{\pi}{\omega_{os}}. \quad (8)$$

На третьем и последующих нечетных полуциклах колебаний ($n = 3, 5, 7, \dots$) коэффициенты $P_{n,i}$ и $R_{n,i}$ определяются по формулам

$$P_{n,i} = \frac{\omega_i G_{n,3} \sin \omega_i t_n + G_{n,4} \cos \omega_i t_n}{\omega_i \left[\int_0^L m w_i^2(x) dx + m_L w_i^2(L) + I_m \theta_i^2(L) \right]}; \quad (9)$$

$$R_{n,i} = \frac{\omega_i G_{n,3} \sin \omega_i t_n - G_{n,4} \cos \omega_i t_n}{\omega_i \left[\int_0^L m w_i^2(x) dx + m_L w_i^2(L) + I_m \theta_i^2(L) \right]}, \quad (10)$$

где

$$G_{n,3} = \int_0^L m y_{n-1,j}(x) w_i(x) dx + m_L y_{n-1,j}(L) w_i(L) + I_m \theta_{n-1,j}(L) \theta_i(L),$$

$$G_{n,4} = \int_0^L m v_{n-1,j}(x) w_i(x) dx + m_L v_{n-1,j}(L) w_i(L) + I_m \left[\frac{\partial \theta_{n-1,j}(L,t)}{\partial t} \right]_{t_n} \theta_i(L)$$

при соответствующих начальных условиях

$$y_{n-1,j}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} w_{i,j}(x) (P_{n-1, \tau i} \sin \omega_{oi} t_n + R_{n-1, \tau i} \cos \omega_{oi} t_n);$$

$$v_{n-1,j}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{oi} w_{ij}(x) (P_{n-1, \tau i} \cos \omega_{oi} t_n - R_{n-1, \tau i} \sin \omega_{oi} t_n);$$

$$\theta_{n-1,j}(L) = \sum_{i=1}^{\infty} \theta_{ij}(L) (P_{n-1, \tau i} \sin \omega_{oi} t_n + R_{n-1, \tau i} \cos \omega_{oi} t_n);$$

$$\left[\frac{\partial \theta_{n-1,j}(L,t)}{\partial t} \right]_{t_n} = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_{oi} \theta_{ij}(L) (P_{n-1, \tau i} \cos \omega_{oi} t_n - R_{n-1, \tau i} \sin \omega_{oi} t_n),$$

определяемых в моменты времени

$$t_n = \frac{n-1}{2} \left(\frac{\pi}{\omega_s} + \frac{\pi}{\omega_{os}} \right). \quad (11)$$

Коэффициенты P и R , а также усредненные по N (четное число) циклам колебаний их значения представим следующим образом:

$$H_{n,i} = \sqrt{P_{n,i}^2 + R_{n,i}^2}; \quad H_{n, \tau i} = \sqrt{P_{n, \tau i}^2 + R_{n, \tau i}^2}; \quad (12)$$

$$\bar{H}_i = \sum_{n=1,3,\dots}^{N-1} H_{n,i} / N; \quad \bar{H}_{\tau i} = \sum_{n=2,4,\dots}^N H_{n,\tau i} / N. \quad (13)$$

Помимо коэффициентов (12) определяли также их максимальные и минимальные значения за N циклов колебаний: $H_{n,i}^{\max}$, $H_{n,i}^{\min}$, $H_{n,\tau i}^{\max}$, $H_{n,\tau i}^{\min}$.

Оценка ограничения, накладываемого расчетной методикой на величину глубины трещины. Алгоритм расчета построен в предположении, что на соответствующих полуциклах колебаний трещина либо постоянно открыта, либо закрыта. В то же время при возникновении значительных амплитуд сопутствующих форм колебаний момент открытия или закрытия трещины может наступить раньше момента времени t_n , когда сечение с трещиной оказывается в нейтральном положении. В этом случае алгоритм расчета в представленном виде использовать нельзя. Критерием оценки диапазона его применимости служит фактор изменения знака изгибающего момента в сечении с трещиной:

$$M_n(L_T, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 w_i(x)}{\partial x^2} \right]_{x=L_T} (P_{n,i} \sin \omega_i t + R_{n,i} \cos \omega_i t); \quad (14)$$

$$M_{n,\tau}(L_T, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\partial^2 w_{i1}(x)}{\partial x^2} \right]_{x=L_T} (P_{n,\tau i} \sin \omega_{oi} t + R_{n,\tau i} \cos \omega_{oi} t). \quad (15)$$

Значения параметров трещины, при которых начинается изменение знака изгибающего момента, определяют границы применимости алгоритма расчета. Заметим, что предложенный подход может быть распространен также на случай, когда трещина либо открывается на нечетных полуциклах, либо закрывается на четных, однако, очевидно, что при этом процедура построения решения усложнится.

В работе [16] показано, что при увеличении гибкости стержня, определяемой отношением L/h , происходит снижение чувствительности собственных частот колебаний стержня к размеру трещины. Поэтому при расчетах принято наименьшее отношение $L/h = 20$, которое позволяет оставаться в рамках теории Бернулли–Эйлера с достаточной точностью.

В табл. 1 приведены значения относительной глубины трещины, которые представляют собой верхнюю границу применимости расчетной модели для трех форм колебаний консольного стержня ($L/h = 20$; $L_T/L = 0,1$; $b/h = 1$; $m_L = 0$). Эти значения использовались при вычислениях амплитуд исходной и сопутствующих форм колебаний указанного стержня. Результаты вычислений свидетельствуют о том, что каждый полуцикл колебаний стержня с закрывающейся трещиной характеризуется неповторяющимся набором соотношений амплитуд исходной и сопутствующих форм колебаний и что амплитуды сопутствующих форм могут достигать значительных величин.

При местоположении трещины $L_T / L = 0,5$ амплитуды сопутствующих форм колебаний стержня при верхних пределах относительной глубины трещины ($\gamma = 0,43$ для первой формы колебаний, $\gamma = 0,68$ для второй, $\gamma = 0,30$ для третьей) ниже, чем в случае $L_T / L = 0,1$, и в работе не приведены.

Т а б л и ц а 1

Коэффициенты исходной и сопутствующих форм колебаний консольного стержня ($L_T / L = 0,1$)

a/h	s	i	$H_{n,i}^{\min} / H_{n,ti}^{\min}$	\bar{H}_i / \bar{H}_{ti}	$H_{n,i}^{\max} / H_{n,ti}^{\max}$
0,53	1	1	0,969/0,754	0,985/0,765	1,000/0,778
		2	0/0,016	0,141/0,106	0,231/0,167
		3	0/0,002	0,036/0,031	0,063/0,054
0,54	2	1	0/0,020	0,223/0,156	0,437/0,279
		2	0,782/0,569	0,921/0,644	1,000/0,694
		3	0/0,071	0,175/0,142	0,380/0,299
0,48	3	1	0/0,004	0,210/0,162	0,367/0,272
		2	0/0,005	0,203/0,158	0,437/0,342
		3	0,818/0,695	0,913/0,778	1,000/0,850

Интересным представляется вопрос о причинах возникновения сопутствующих форм колебаний. Поскольку возможное соударение берегов трещины не учитывается при моделировании колебаний стержня с трещиной, оно не может быть источником возбуждения различных форм колебаний. Анализ выражений (6), (7) и (9), (10), определяющих амплитуды всех возникающих форм колебаний, приводит к выводу, что механизмом возникновения сопутствующих форм колебаний является нелинейный характер колебаний стержня при возникновении в нем закрывающейся трещины. Начальный строго гармонический характер колебаний неповрежденного стержня нарушается при возникновении трещины, и уровень нелинейных искажений колебательного процесса увеличивается по мере ее роста. Этим объясняется тот факт, что величина амплитуд сопутствующих форм колебаний прямо пропорциональна глубине трещины.

При наличии сопутствующих колебаний моменты времени, когда сечение с трещиной находится в нейтральном положении, строго говоря, не будут совпадать с соответствующими моментами времени, определяемыми по формулам (8) и (11). В диапазоне относительных глубин трещины $0 \leq \gamma \leq 0,25$ влияние этого фактора на коэффициенты (12) мало и им можно пренебречь. Однако численная реализация расчетной модели предусматривает вычисление действительных моментов времени, в которые задаются начальные условия для последующих полуциклов колебаний.

Ранее на основе сопоставления результатов расчета с экспериментом показано, что предложенная расчетная методика позволяет с достаточной точностью прогнозировать изменение собственных частот [12] и форм [17] колебаний консольного стержня с трещиной усталости. Кроме того, при проведении экспериментальных исследований [12, 17] наблюдались предсказанные расчетом явления: возникновение сопутствующих форм колебаний и неповторяющийся набор высших форм колебаний на каждом полу-

цикле. Последнее обстоятельство обусловило необходимость усреднения результатов оценки нелинейных искажений формы волны деформации и ускорения за 100 400 циклов колебаний при использовании экспериментальной методики гармонического анализа [18]. Таким образом, предложенная расчетная методика адекватно описывает колебания консольного стержня с закрывающейся трещиной.

Отметим также, что экспериментальные исследования образцов с трещинами усталости [12] позволили обнаружить, что процесс возникновения сопутствующих форм колебаний зависит от амплитуды колебаний (закономерность не установлена) и от точности настройки частоты вынуждающей силы на собственную частоту колебательной системы.

Результаты расчетов. Расчеты выполнены для диапазона относительных глубин трещины $0 \leq \gamma \leq 0,25$, который является наиболее интересным с практической точки зрения. В этом диапазоне пределы изменения амплитуд колебаний по каждой из пяти исследованных собственных форм и усредненные за N циклов значения амплитуд достаточно быстро сходятся к определенным значениям (стабилизируются), т.е. процесс колебаний является устойчивым. Этот вывод иллюстрируется результатами расчетов коэффициентов $H_{n,i}$ и $H_{n,ti}$ и их усредненных значений (13) для первой (исходной) и двух сопутствующих форм колебаний консольного стержня ($L/h = 20; L_T/L = 0,1; a/h = 0,25; m_L = 0$) с максимальной рассматриваемой глубиной трещины (табл. 2). Как видно, уже после 25-го цикла колебаний пределы изменения коэффициентов $H_{n,i}$ и $H_{n,ti}$, как и их усредненные значения, остаются практически постоянными. Отклонение коэффициентов $H_{n,s}$ и $H_{n,ts}$ для первой формы колебаний от усредненного значения в табл. 2 не приведено, поскольку оно не превышает 0,02% (заметим, что это отклонение в случае, когда исходной являются вторая и третья формы колебаний, соответственно составляет 0,17 и 0,22%).

Т а б л и ц а 2

Коэффициенты первой и сопутствующих форм колебаний консольного стержня ($a/h = 0,25, L_T/L = 0,1$)

N, цикл	$s = 1$	$i = 2$			$i = 3$		
	\bar{H}_s / \bar{H}_{ts}	$H_{n,i}^{\min} / H_{n,ti}^{\min}$	\bar{H}_i / \bar{H}_{ti}	$H_{n,i}^{\max} / H_{n,ti}^{\max}$	$H_{n,i}^{\min} / H_{n,ti}^{\min}$	\bar{H}_i / \bar{H}_{ti}	$H_{n,i}^{\max} / H_{n,ti}^{\max}$
1	1,0/0,957	0/0	0/0,008	0/0,008	0/0	0/0,001	0/0,001
5	1,0/0,957	0/0,005	0,008/0,010	0,014/0,015	0/0,001	0,004/0,005	0,008/0,008
25	1,0/0,957	0/0,002	0,009/0,010	0,015/0,015	0/0,001	0,007/0,007	0,011/0,010
50	1,0/0,957	0/0,002	0,009/0,010	0,015/0,015	0/0,001	0,007/0,006	0,011/0,010
100	1,0/0,957	0/0,002	0,009/0,010	0,015/0,015	0/0,001	0,007/0,006	0,011/0,010
200	1,0/0,957	0/0,002	0,009/0,010	0,015/0,015	0/0,001	0,007/0,006	0,011/0,010

Поэтому в исследуемом диапазоне относительных глубин трещины можно ограничиться рассмотрением 1-го цикла колебаний, поскольку амплитуда 1-го цикла исходной формы колебаний отличается от амплитуд последующих циклов не более чем на 0,22%. Кроме того, при таких условиях можно пренебречь влиянием сопутствующих форм колебаний на

рассматриваемые вибрационные характеристики в силу малости их амплитуд как на 1-м, так и на последующих циклах. Следовательно, выражения (1) и (2) для определения перемещения различных сечений стержня преобразуются к виду

$$y(x, t) = w_s(x) \sin \omega_s t; \quad (16)$$

$$y_{Tj}(x, t) = w_{sj}(x)(P_{TS} \sin \omega_{os} t + R_{TS} \cos \omega_{os} t). \quad (17)$$

Максимальные отклонения оси стержня от его нейтрального положения на разных полциклах определяются следующим образом:

$$y^{\max}(x) = w_s(x); \quad (18)$$

$$y_{Tj}^{\max}(x) = w_{sj}(x) \left(P_{TS} \cos \frac{\omega_{os}}{\omega_s} \pi - R_{TS} \sin \frac{\omega_{os}}{\omega_s} \pi \right). \quad (19)$$

Волна деформации на поверхности стержня описывается выражениями [12]

$$\varepsilon(x, t) = M_s(x) \sin \omega_s t; \quad (20)$$

$$\varepsilon_T(x, t) = f_\varepsilon(x, \gamma) M_{sj}(x) (P_{TS} \sin \omega_{oi} t + R_{TS} \cos \omega_{oi} t), \quad (21)$$

где функция $f_\varepsilon(x, \gamma)$ учитывает влияние трещины на распределение деформаций по поверхности стержня со стороны трещины и на противоположной стороне [12].

Поскольку рассматриваемые временные функции являются периодическими, для определения уровня их нелинейных искажений можно использовать Фурье-анализ:

$$F_T = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_{TS} t + \lambda_k), \quad (22)$$

где $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$; $\lambda_k = \arctg \frac{a_k}{b_k}$; ω_{TS} – угловая частота колебаний стержня с закрывающейся трещиной по исходной форме [12];

$$a_k = \frac{\omega_{TS}}{\pi} \left[\int_{t_1}^{t_2} f(x, t) \cos k\omega_{TS} t dt + \int_{t_2}^{t_3} f_T(x, t) \cos k\omega_{TS} t dt \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (23)$$

$$b_k = \frac{\omega_{TS}}{\pi} \left[\int_{t_1}^{t_2} f(x, t) \sin k\omega_{TS} t dt + \int_{t_2}^{t_3} f_T(x, t) \sin k\omega_{TS} t dt \right], \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (24)$$

Моменты времени t_1, t_2 и t_3 определяются формулами (8) и (11). Функции $f(x, t)$ и $f_T(x, t)$ в (23) и (24) определяются для волны перемещения соответственно выражениями (16) и (17), для волны ускорения – второй производной выражений (16) и (17) по времени, для волны деформации – уравнениями (20) и (21).

Уровень нелинейных искажений формы волны перемещения, ускорения и деформации оценивали так называемым коэффициентом гармоник [19]:

$$\chi = \sum_{k=2}^{20} A_k / A_1. \quad (25)$$

При его вычислении ограничивались определением амплитуд 20 гармоник, поскольку дальнейшее увеличение их числа не приводит к существенному изменению величины коэффициента гармоник.

Заметим, что поскольку каждый полупериод колебаний стержня с закрывающейся трещиной характеризуется своим неповторяющимся набором амплитуд сопутствующих колебаний, то в случаях, когда эти амплитуды достигают значительных величин, что возможно при больших относительных глубинах трещины, соответствующие функции, описывающие волны перемещения, ускорения и деформации, будут существенно непериодическими. К таким функциям неприменим Фурье-анализ, и для анализа их нелинейных искажений требуются другие подходы.

Геометрические характеристики стержня таковы: $L / h = 20$; $L_T / L = 0,1$ либо $L_T / L = 0,5$. Относительная глубина трещины варьируется в диапазоне $0 \leq a / h \leq 0,25$. Масса на конце стержня m_L и ее момент инерции I_m приняты равными нулю. Модуль упругости и плотность материала стержня, а также отношение b / h не оказывают влияния на относительное изменение рассматриваемых ВХП (при расчетах их значения принимались следующими: $E = 200$ ГПа; $\rho = 7800$ кг/м³; $b / h = 1$).

Ниже представлены результаты исследований наиболее чувствительных к повреждению вибрационных характеристик: коэффициент a_0 и коэффициент гармоник χ . Заметим, что относительная амплитуда второй гармоники, использованная в работе [12] в качестве характеристики повреждения, в среднем на 20...30% ниже коэффициента гармоник и поэтому здесь не рассматривается. С другой стороны, относительно небольшая разница между этими характеристиками означает, что все другие гармоники оказывают незначительное влияние на величину коэффициента гармоник.

На рис. 2 б показано изменение различных ВХП по длине стержня для трех собственных форм колебаний (на рисунках и в тексте индекс d обозначает перемещение, индекс a – ускорение, индекс cr – деформацию на поверхности с трещиной, индекс int – деформацию на неповрежденной поверхности стержня).

Так, рис. 2 иллюстрирует влияние закрывающейся трещины на отношение максимальных отклонений оси стержня от его нейтрального положения (при отсутствии трещины $y_{Tj}^{\max}(x) / y^{\max}(x) = 1$). Как видно, изменение этой характеристики, определяющей асимметрию цикла, является ка-

чественным признаком наличия повреждения типа закрывающейся трещины. Влияние трещины существенно ослабевает по мере ее удаления от заделки: этот вывод следует из сопоставления кривых 1 и 4. Изменение функции $y_{ti}^{\max}(x)/y^{\max}(x)$ невелико (не превышает 10% для первой формы колебаний): чем выше форма колебаний, тем оно меньше. Исключения составляют сечения, в которых указанная функция претерпевает разрыв (кривые 2 и 3), который связан с тем, что координаты узлов колебаний на полциклах, когда трещина закрыта и открыта, не совпадают. В табл. 3 приведены координаты узлов колебаний стержня на полциклах, когда трещина закрыта и открыта. Заметим, что рассматриваемые функции имеют перелом в сечении с трещиной: в сечении $x/L=0,1$ (кривые 1-3) и в сечении $x/L=0,5$ (кривая 4). Эту особенность функций можно использовать для определения местоположения трещины.

Т а б л и ц а 3

Координаты узлов колебаний и нулевых изгибающих моментов консольного стержня ($a/h = 0,25, L_T/L = 0,1$)

s	x / L			
	$y^{\max}(x/L) = 0$	$y_{Tj}^{\max}(x/L) = 0$	$M^{\max}(x/L) = 0$	$M_{Tj}^{\max}(x/L) = 0$
2	0,7834	0,7814	0,2166	0,2072
3	0,5036	0,5027	0,1324	0,1289
3	0,8677	0,8675	0,4964	0,4959

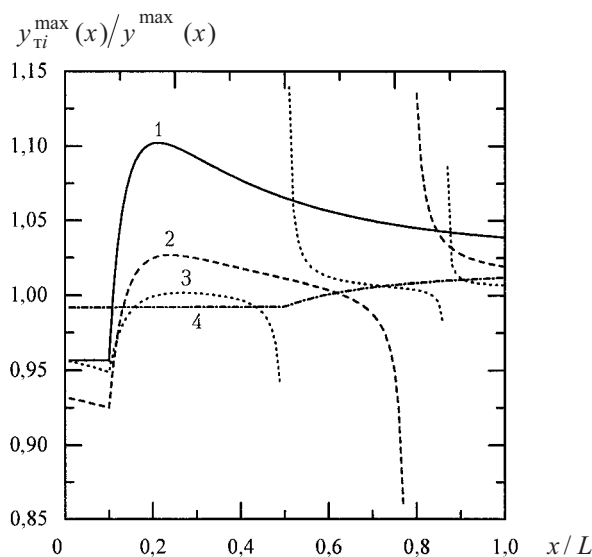


Рис. 2. Относительное изменение первой (1, 4), второй (2) и третьей (3) собственных форм колебаний стержня. (Здесь и на рис. 3–6: 1–3 – $L_T/L = 0,1$; 4 – $L_T/L = 0,5$; $a/h = 0,25$.)

Зависимости относительного изменения нулевого коэффициента для волны перемещения и ускорения качественно аналогичны зависимостям изменения асимметрии цикла колебаний, хотя степень их изменения не-

сколько ниже: до 9% для волны перемещения и до 6% для волны ускорения – эти оценки выполнены без учета поведения функций в окрестности узлов колебаний (при отсутствии трещины $(a_0/A_1)_d = (a_0/A_1)_a = 0$) – рис. 3,а и 4,а. Зависимости для коэффициента гармоник имеют качественно другой вид (рис. 3,б и 4,б). Наибольшие значения коэффициента гармоник отмечаются вблизи заделки и узлов колебаний. Необходимо заметить, что при приближении к узлам колебаний с двух сторон соответствующие функции достигают максимумов.

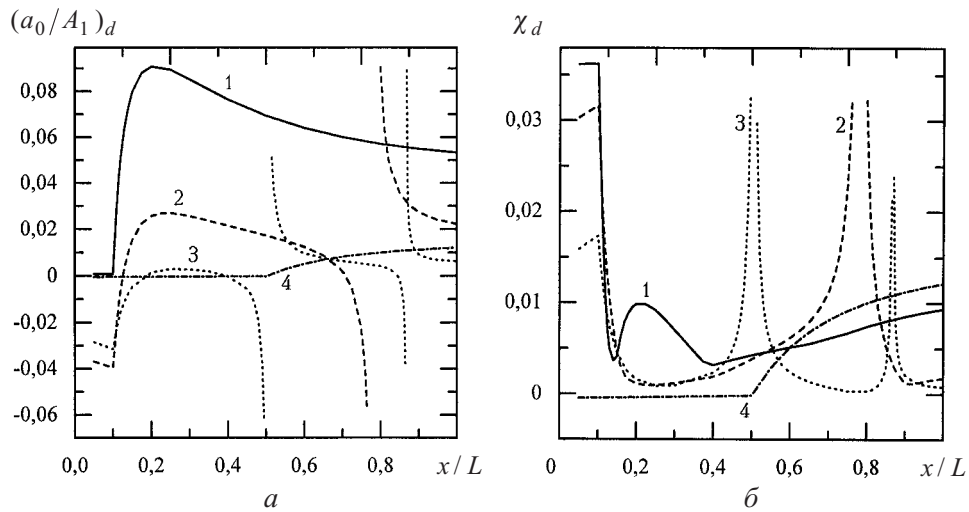


Рис. 3. Относительное изменение нулевого коэффициента (а) и коэффициента гармоник (б) по длине стержня для волны перемещения при первой (1, 4), второй (2) и третьей (3) собственных формах колебаний.

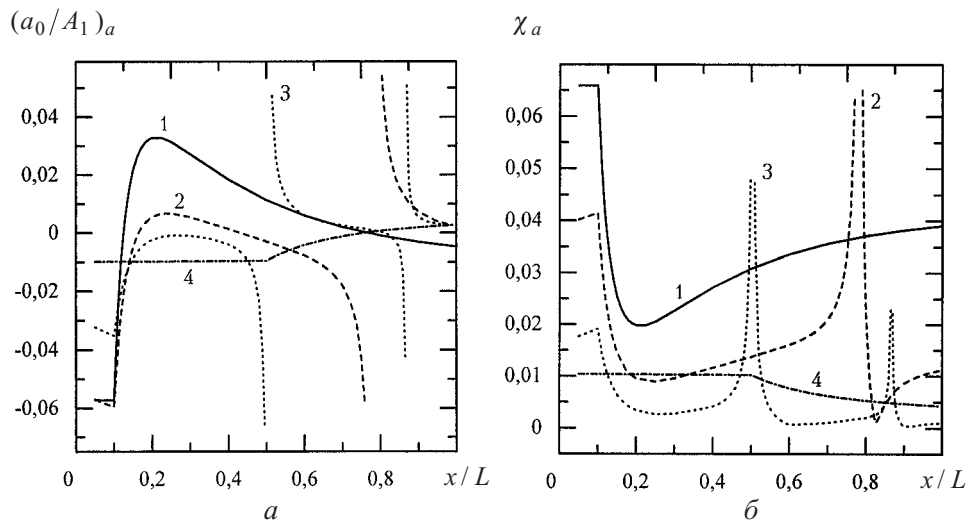


Рис. 4. Относительное изменение нулевого коэффициента (а) и коэффициента гармоник (б) по длине стержня для волны ускорения при первой (1, 4), второй (2) и третьей (3) собственных формах колебаний.

Чувствительность обеих характеристик для волны перемещения и ускорения снижается по мере удаления трещины от заделки (на рис. 3, 4 кривые 1, 4), а перелом функций их распределения по длине стержня указывает на сечение с трещиной.

Характерной особенностью изменения нулевого коэффициента по длине стержня для волны деформации является наличие максимумов в сечении с трещиной при всех формах колебаний (рис. 5,а и 6,а). При этом амплитуда нулевого коэффициента сопоставима с амплитудой первой гармоники. Здесь так же, как и в соответствующих случаях для волны перемещения и ускорения, имеет место разрыв функций при второй и третьей формах колебаний, обусловленный несовпадением координат сечений, при которых изгибающий момент достигает нулевого значения на разных полуциклах колебаний (табл. 3).

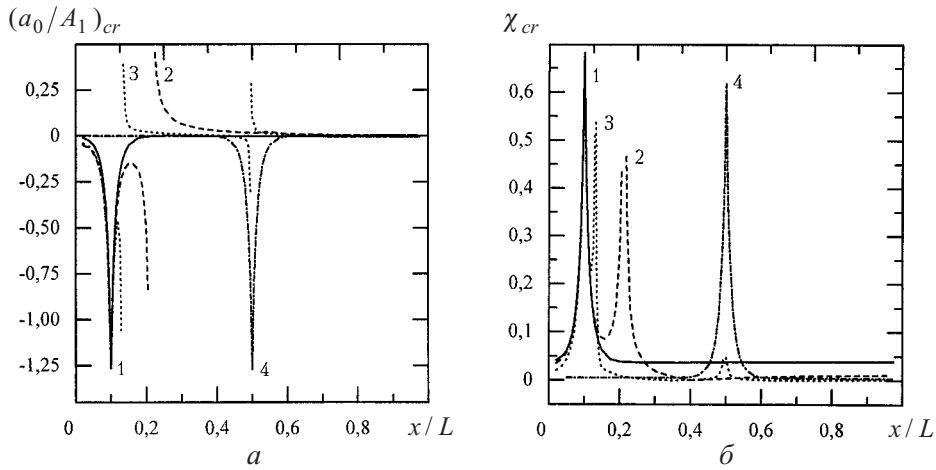


Рис. 5. Относительное изменение нулевого коэффициента (а) и коэффициента гармоник (б) по длине стержня для волны деформации на поверхности с трещиной при первой (1, 4), второй (2) и третьей (3) собственных формах колебаний.

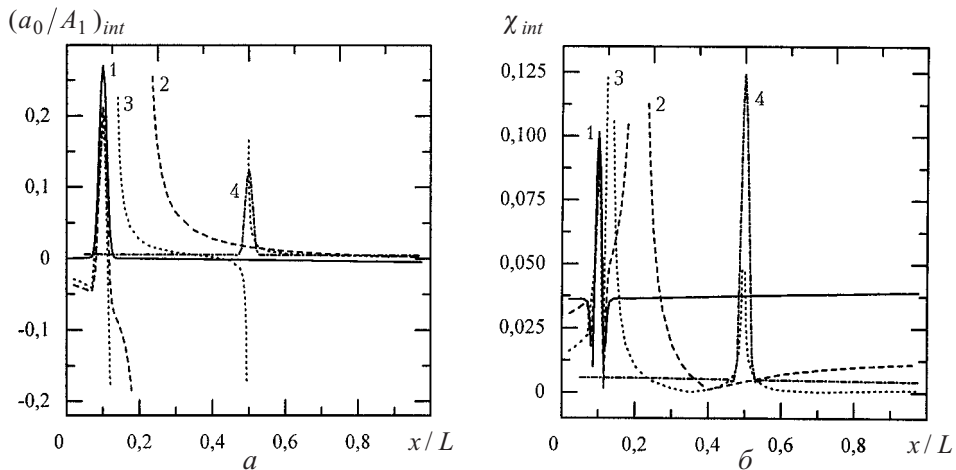


Рис. 6. Относительное изменение нулевого коэффициента (а) и коэффициента гармоник (б) по длине стержня для волны деформации на поверхности без трещины при первой (1, 4), второй (2) и третьей (3) собственных формах колебаний.

Коэффициенты гармоник для волны деформации достигают наибольших значений в сечениях с трещиной и в окрестности сечений с нулевым изгибающим моментом (рис. 5,б и 6,б). Обращает на себя внимание тот факт, что степень изменения коэффициента гармоник на неповрежденной поверхности стержня в окрестности трещины растет по мере удаления последней от заделки (на рис. 6,б кривые 1, 4), что качественно отличает эту характеристику от всех остальных.

Влияние массы груза на конце стержня и ее момента инерции на относительное изменение исследуемых вибрационных характеристик зависит от формы колебаний стержня. Так, различие в значениях функции $y_{Tj}^{\max}(x)/y^{\max}(x)$ для стержня с массой ($m_L = 7,8$ кг, что равно 50-кратной массе стержня, и $I_m = 0,01$ кг·м²) и без массы на конце не превышает 1% для первой и 20% для второй формы. Наличие массы на конце стержня приводит к увеличению степени относительного изменения нулевого коэффициента (в некоторых случаях в несколько раз) и к снижению степени относительного изменения коэффициента гармоник для всех видов волн.

Анализ распределения вибрационных характеристик по длине стержня (рис. 2–6) позволяет определить сечения, в которых проявление той или иной характеристики наиболее значимо. Так, для относительного изменения асимметрии цикла колебаний и нулевого коэффициента для волны перемещения и ускорения – это сечение $x/L = 0,2$ и сечения в окрестности узлов колебаний. Коэффициент гармоник для волны перемещения и ускорения наиболее существенно изменяется вблизи заделки и узлов колебаний. Нулевой коэффициент и коэффициент гармоник для волны деформации достигают максимума вблизи сечений с трещиной и с нулевым изгибающим моментом.

Однако возможность практического использования рассмотренных вибрационных характеристик при их измерении вблизи заделки и узлов колебаний вызывает сомнения, поскольку уровень колебаний указанных сечений стержня мал. Поэтому на рис. 7 приведены примеры зависимостей ВХП от относительной глубины трещины, измерение которых более реально с практической точки зрения. Исключение составляет коэффициент гармоник для волны ускорения при второй форме колебаний, определенный в сечении $x/L = 0,78$ (кривая 3), амплитуда колебаний которого составляет 1,5% максимальной амплитуды колебаний стержня (сечение $x/L = 1$). Отметим, что нулевой коэффициент для волны деформации на поверхности с трещиной (кривая 4 построена без учета знака исходной функции), как и коэффициент гармоник K_{cr} (по абсолютной величине приблизительно в два раза меньше нулевого коэффициента, соответствующая зависимость не показана), практически не зависит от размера трещины. Поэтому указанные характеристики совершенно непригодны для оценки величины повреждения. В то же время аналогичные характеристики, определяемые на противоположной от трещины поверхности стержня, заметно реагируют на рост трещины (кривые 5 и 6).

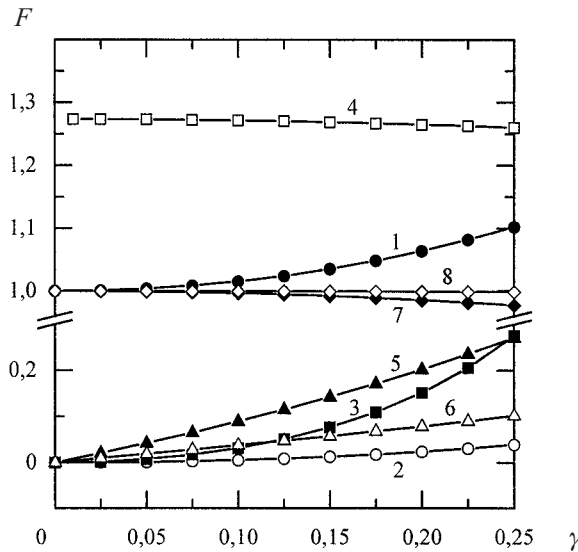


Рис. 7. Влияние размера трещины на относительное изменение ВХП консольного стержня с закрывающейся трещиной, $L_T/L=0,1$. (Здесь и на рис. 8: 1 – $F = y_{ij}^{\max}(x)/y^{\max}(x)$ ($x/L=0,2; s=1$); 2 – $F = K_a$ ($x/L=1; s=1$); 3 – $F = K_a$ ($x/L=0,78; s=2$); 4 – $F = (a_0/A_1)_{cr}$ ($x/L=0,1; s=1$); 5 – $F = (a_0/A_1)_{int}$ ($x/L=0,1; s=1$); 6 – $F = K_{int}$ ($x/L=0,1; s=1$); 7 – $F = \omega_T/\omega$ ($s=1$); 8 – $F = \omega_T/\omega$ ($s=3$).

На рис. 7 также представлены зависимости относительного изменения собственных частот колебаний стержня от размера трещины. Как видно, влияние трещины на собственные частоты колебаний невелико по сравнению с другими ВХП и проявляется тем меньше, чем выше форма колебаний.

Сравнительный анализ чувствительности ВХП. В качестве меры чувствительности вибрационной характеристики $F(\gamma)$ использовалась скорость ее изменения

$$V = \partial F(\gamma)/\partial \gamma. \quad (26)$$

Как видно из рис. 8, ни одна из рассмотренных на рис. 7 ВХП не обладает наибольшей чувствительностью во всем исследованном диапазоне размеров трещины. Наиболее чувствительными характеристиками в области малых трещин оказались нулевой коэффициент и коэффициент гармоник для волны деформации на неповрежденной поверхности стержня в сечении с трещиной (кривые 5 и 6). Чувствительность относительного изменения асимметрии цикла колебаний стержня (кривая 1) и коэффициента гармоник вблизи узла колебаний (кривая 3) достаточно высока во второй половине исследуемого диапазона размеров трещины. Однако возможность определения последнего на практике весьма проблематична.

В целом указанные характеристики обладают достаточной чувствительностью для диагностики относительно малых трещин. Однако, как отмечалось выше, эти характеристики определялись в специально выбранных сечениях, в которых они проявлялись наиболее значимо. В свою очередь, координаты таких характерных сечений зависят от местоположения трещины.

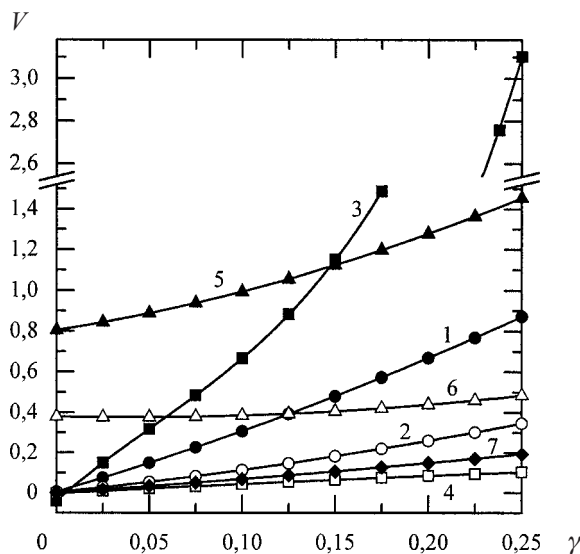


Рис. 8. Влияние размера трещины на скорости изменения ВХП $V = \partial F(\gamma)/\partial \gamma$, представленных на рис. 7.

Таким образом, для оптимального использования вибрационных характеристик необходимо знать местоположение трещины. Теоретически рассмотренные вибрационные характеристики, за исключением собственных частот колебаний, позволяют судить о местоположении трещины по перелому функции распределения соответствующей характеристики по длине стержня или по характерному максимуму этой функции. Однако на практике получение такой функции весьма трудоемко и не всегда возможно.

Заключение. Предложена расчетная модель для построения последовательного решения задачи определения собственных форм изгибных колебаний стержня с закрывающейся трещиной на каждом полуцикле его колебаний. Установлены пределы применимости расчетной методики.

Показано, что на каждом полуцикле колебаний такого стержня в момент открытия и закрытия трещины возникает неповторяющийся набор амплитуд сопутствующих форм колебаний. В исследованных пределах относительной глубины трещины ($0 \leq \gamma \leq 0,25$) границы диапазона изменения этих амплитуд, как и их усредненные за N циклов колебаний значения, достаточно быстро стабилизируются, и в целом процесс колебаний устойчив.

Расчетная методика позволяет обнаружить характерные особенности колебаний консольного стержня с закрывающейся трещиной, что получило экспериментальное подтверждение, и, следовательно, может использоваться для решения как прямой, так и обратной задачи диагностики повреждения.

Как показали исследования, возникновение повреждения обуславливает существенную нелинейность зависимостей вибрационных характеристик от координаты сечения, для которого они определяются. Уровень этой нелинейности служит диагностическим признаком наличия повреждения типа закрывающейся трещины. Характерные особенности изменения вибрационной

характеристики по длине стержня в окрестности сечения с трещиной (перелом или максимум) указывают на местоположение трещины. Количественные изменения вибрационной характеристики по мере роста трещины позволяют определить размеры последней. Таким образом, на основе анализа изменения вибрационной характеристики по длине стержня может быть полностью решена задача диагностики повреждения, а именно: определение его размеров и местоположения.

Наиболее чувствительными вибрационными характеристиками повреждения являются нулевой коэффициент и коэффициент гармоник для волны деформации, определяемые в окрестности сечения с трещиной на противоположной от трещины поверхности стержня.

Резюме

Розглядаються вільні коливання пружного консольного стрижня з крайовою тріщиною, що закривається. Тріщина моделюється пружним шарніром, податливість якого прийнята скінченною і визначається на основі енергетичного критерію еквівалентності.

Побудовано алгоритм послідовного розрахунку власних форм для кожного з обмеженого числа циклів коливань стрижня. Показано, що при розкритті і закритті тріщини виникають також інші, відмінні від початково заданої, форми коливань стрижня, досліджено особливості їхнього прояву.

Проаналізовано чутливість вібраційних характеристик пошкодження, що визначаються на основі оцінки нелінійних спотворень форми хвилі переміщення, прискорення і деформації перетинів стрижня з тріщиною, що закривається.

1. *Ismail F., Ibrahim A., and Martin H. R.* Identification of fatigue cracks from vibration testing // *J. Sound and Vibration.* – 1990. – **140**, No. 2. – P. 305 – 317.
2. *Rytter A., Brincker R., and Kirkegaard P. H.* An Experimental Study of the Modal Parameters of a Cantilever // *Fracture & Dynamics*, Paper No. 37, Department of Building Technology and Structural Engineering, University of Aalborg, Denmark, 1992. – 76 p.
3. *Cheng S. M., Swamidas A. S. J., Wu X. J., and Wallace W.* Vibrational response of a beam with a breathing crack // *J. Sound and Vibration.* – 1999. – **225**, No. 1. – P. 201 – 208.
4. *Rizos P. F., Aspragathos N., and Dimarogonas A. D.* Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes // *Ibid.* – 1990. – **138**, No. 3. – P. 381 – 388.
5. *Ballo I.* Non-linear effects of vibration of a continuous transverse cracked slender shaft // *Ibid.* – 1998. – **217**, No. 2. – P. 321 – 333.
6. *Ruotolo R., Surace C., Crespo P., and Storer D.* Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack // *Computers and Structures.* – 1996. – **61**, No. 6. – P. 1057 – 1074.

7. Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М. Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // Дефектоскопия. – 1985. – № 3. – С. 77 – 85.
8. Цыфанский С. Л., Бересневич В. И., Магоне М. А. Вибродиагностика усталостных трещин в несущих поверхностях летательных аппаратов на основе использования нелинейных эффектов // Там же. – 1993. – № 2. – С. 87 – 94.
9. Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I. Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // J. Sound and Vibration. – 1998. – **213**, No. 1. – P. 159 – 168.
10. Afolabi D. An antiresonance technique for detecting structural damage // Proc. of the 5th IMAC. – 1987. – P. 491 – 495.
11. Матвеев В. В. К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Пробл. прочности. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
12. Матвеев В. В., Бовсуновский А. П. К определению вибрационных характеристик стержня с закрывающейся трещиной при изгибных колебаниях // Там же. – 2000. – № 3. – С. 5 – 23.
13. Ostachowicz W. and Krawczuk M. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam // J. Sound and Vibration. – 1991. – **150**, No. 2. – P. 191 – 201.
14. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
15. Reid Parameter R. and Mukherji B. Stress intensity factors for an edge-cracked strip in bending // Int. J. Fracture. – 1974. – **10**, No. 3. – P. 441 – 444.
16. Kikidis M. L. and Papadopoulos C. A. Slenderness ratio effect on cracked beams // J. Sound and Vibration. – 1992. – **155**, No. 1. – P. 1 – 11.
17. Bovsunovsky A. P. and Matveev V. V. Analytical approach to the determination of dynamic characteristics of a beam with a closing crack // Ibid. – 2000. – **235**, No. 3. – P. 415 – 434.
18. Бовсуновский А. П. Форма петли механического гистерезиса для металлических материалов при гармонических напряжениях ниже предела выносливости. Сообщ. 2. Экспериментальная методика и результаты // Пробл. прочности. – 1997. – № 3. – С. 119 – 130.
19. Бовсуновский А. П. К вопросу об исследовании колебаний нелинейной механической системы, моделирующей тело с трещиной // Там же. – 2001. – № 4. – С. 97 – 111.

Поступила 26. 12. 2000

Влияние коэффициента Пуассона на предельное напряженное состояние покрытия

Н. А. Долгов, Б. А. Ляшенко

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Представлены соотношения для расчета эквивалентных напряжений в покрытии. Построены зависимости эквивалентных напряжений от различия коэффициентов Пуассона основы и покрытия. Показано, что величины максимальных нормальных и эквивалентных напряжений для разных покрытий хорошо описываются расчетными зависимостями. Анализ полученных результатов свидетельствует о необходимости учета влияния коэффициента Пуассона покрытия на эквивалентные напряжения и соответственно на предельное напряженное состояние в покрытии при расчетах конструктивных элементов с покрытиями на прочность и экспериментальном определении когезионной прочности при лабораторных испытаниях. При проектировании элементов конструкций с покрытиями необходимо стремиться к такому сочетанию упругих свойств основы и покрытия, при котором величина эквивалентных напряжений в покрытии минимальна.

Ключевые слова: покрытие, основа, коэффициент Пуассона, модуль упругости, напряженное состояние, эквивалентные напряжения.

Введение. В покрытии предельное напряженное состояние (НС) наступает при повышении нормальных напряжений до уровня, при котором происходит когезионное разрушение. Покрытие разрушается в областях, где значения напряжений возрастают до уровня критических. Вследствие различия упругих свойств основы и покрытия НС системы основа–покрытие неоднородное. Поэтому достоверные сведения о когезионной прочности можно получить только при учете неоднородности НС, возникающего при испытаниях образцов с покрытиями.

Для определения величины и характера распределения напряжений обычно используются различные модели системы основа–покрытие.

Особенностью системы основа–покрытие является способность передавать через адгезионный контакт нагрузки как в покрытие, так и в основу. Рассмотрим случаи, когда напряжения в покрытии возникают вследствие нагружения основы.

В работах [1–5] представлены различные подходы к определению напряжений в покрытии при приложении к основе растягивающей нагрузки. В [6] разработана методика расчета НС элементов конструкций с тонкими многослойными покрытиями. Упругое деформирование пластинки с двухсторонним покрытием рассмотрено в [7]. Соотношения, полученные в данной работе, дают возможность определить распределение нормальных и касательных напряжений в системе основа–покрытие. Задача, поставленная в работе [7], была решена также при упругопластических деформациях [8–10].

Однако ни один из подходов к определению НС системы основа–покрытие не учитывает различия коэффициентов Пуассона материалов

основы и покрытия, вследствие которого в последнем возникают нормальные напряжения как в направлении действия нагрузки, так и в перпендикулярном направлении [11].

Значений главных напряжений, при которых в покрытии возникает предельное напряженное состояние, множество. Для их определения необходимо провести большой объем трудоемких экспериментов. В покрытии предельное напряженное состояние наступает при превышении эквивалентными напряжениями допустимых.

Целью данной работы является вывод соотношений для расчета эквивалентных напряжений в покрытии.

Вывод расчетных соотношений. Рассмотрим прямоугольную пластинку толщиной $2H$, длиной L и шириной b с приложенной по торцам растягивающей нагрузкой в направлении оси z . На верхнюю и нижнюю поверхность пластинки нанесено покрытие толщиной h (рис. 1).

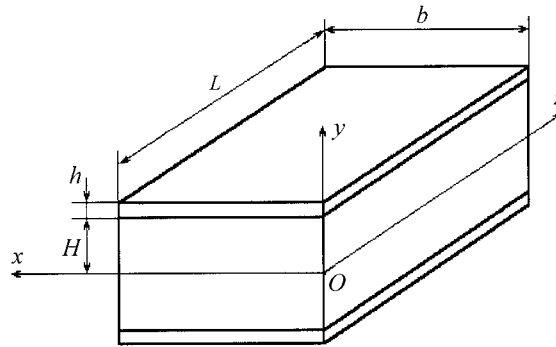


Рис. 1. Расчетная схема образца с покрытием.

В работах [12–14] были получены соотношения для вычисления распределения нормальных напряжений σ_z и σ_x в покрытии при одноосном растяжении основы в направлении оси z :

$$\sigma_z(x, z) = 4 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\left(\frac{d_5}{Lk_n s_2} \right) \frac{1 - \operatorname{ch}(r_n(b/2 - x))}{\operatorname{ch}(r_n b/2)} + \left(\frac{8\varphi_{\max}}{(\pi n)^3} \right) \frac{\operatorname{ch}(r_n(b/2 - x))}{\operatorname{ch}(r_n b/2)} \right] \sin k_n z; \quad (1)$$

$$\sigma_x(x, z) = 4 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\left(\frac{d_5^*}{b\lambda_n p_2} \right) \frac{1 - \operatorname{ch}(q_n(L/2 - z))}{\operatorname{ch}(q_n L/2)} + \left(\frac{8\xi_{\max}}{(\pi n)^3} \right) \frac{\operatorname{ch}(q_n(L/2 - z))}{\operatorname{ch}(q_n L/2)} \right] \sin \lambda_n x, \quad (2)$$

где

$$d_1 = E_{\text{п}} / TS; \quad d_2 = 1 / T; \quad d_3 = 1 / S; \quad d_4 = (1 - \mu_{\text{п}}^2) / E_{\text{п}};$$

$$d_5 = (1 - \mu_{\text{п}} \mu_{\text{о}}) \varepsilon_z; \quad k_n = \pi n / L; \quad s_1 = d_1 k_n^2 + d_2; \quad s_2 = d_3 k_n^2 + d_4;$$

$$r_n = \pm (s_2 / s_1)^{1/2}; \quad S = T = \frac{2}{(H / G_{\text{о}} + h / G_{\text{п}}) h}; \quad \varphi_{\text{max}} = E_{\text{п}} \varepsilon_{z \text{max}}^{\text{п}};$$

$$\varepsilon_{z \text{max}}^{\text{п}} = \frac{E_{\text{о}} \varepsilon_z}{(E_{\text{о}}^{\text{пп}} + E_{\text{п}}^{\text{пп}})(1 - (\mu^{\text{пп}})^2)}; \quad E_{\text{о}}^{\text{пп}} = \frac{E_{\text{о}}}{1 - \mu_{\text{о}}^2}; \quad E_{\text{п}}^{\text{пп}} = \frac{E_{\text{п}} h}{(1 - \mu_{\text{п}}^2) H};$$

$$\mu^{\text{пп}} = \frac{\mu_{\text{о}} E_{\text{о}}^{\text{пп}} + \mu_{\text{п}} E_{\text{п}}^{\text{пп}}}{E_{\text{о}}^{\text{пп}} + E_{\text{п}}^{\text{пп}}}; \quad d_5^* = (\mu_{\text{п}} - \mu_{\text{о}}) \varepsilon_z; \quad \lambda_n = \pi n / b;$$

$$p_1 = d_1 \lambda_n^2 + d_2; \quad p_2 = d_3 \lambda_n^2 + d_4; \quad q_n = \pm (p_2 / p_1)^{1/2}; \quad \xi_{\text{max}} = -E_{\text{п}} \mu_{\text{о}} \varepsilon_z;$$

$E_{\text{п}}, E_{\text{о}}, G_{\text{п}}, G_{\text{о}}, \mu_{\text{п}}, \mu_{\text{о}}$ – модули упругости, сдвига, коэффициенты Пуассона покрытия и основы соответственно; ε_z – продольная относительная деформация основы на участке без покрытия.

Исследование экстремумов функций, представленных соотношениями (1) и (2), показывает, что нормальные напряжения σ_z и σ_x в покрытии являются максимальными в точке с координатами $x = b / 2; z = L / 2$. Следовательно, в покрытии максимальные нормальные напряжения $\sigma_{z \text{max}}$ и $\sigma_{x \text{max}}$ в направлении осей z и x равны:

$$\sigma_{z \text{max}} = 4 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\left(\frac{d_5}{L k_n s_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\text{ch}(r_n b / 2)} \right) + \left(\frac{8 \varphi_{\text{max}}}{(\pi n)^3} \right) \frac{1}{\text{ch}(r_n b / 2)} \right] \sin(k_n L / 2); \quad (3)$$

$$\sigma_{x \text{max}} = 4 \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[\left(\frac{d_5^*}{b \lambda_n p_2} \right) \left(1 - \frac{1}{\text{ch}(q_n L / 2)} \right) + \left(\frac{8 \xi_{\text{max}}}{(\pi n)^3} \right) \frac{1}{\text{ch}(q_n L / 2)} \right] \sin(\lambda_n b / 2). \quad (4)$$

Эквивалентные напряжения $\sigma_{\text{эКВ}}$ в покрытии вычисляются в соответствии с четвертой теорией прочности [15]:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sqrt{\sigma_{z \text{max}}^2 + \sigma_{x \text{max}}^2 - (\sigma_{z \text{max}})(\sigma_{x \text{max}})}. \quad (5)$$

Вычисление нормальных и эквивалентных напряжений в покрытиях. Упругие свойства различных видов покрытий, нанесенных на сталь 12X18H10T, определяли по описанной ранее методике [11]. Металлические образцы для испытаний на растяжение изготавливали из листовой стали толщиной 2 мм. Покрытия длиной 10 мм наносили на металлические образцы с шириной рабочей части 7 мм. При растяжении образца определяли также упругие свойства указанной стали. Измеренные значения модуля упругости и коэффициента Пуассона основы соответственно составили $E_o = 210$ ГПа и $\mu_o = 0,28$. Результаты испытаний образцов с различными покрытиями представлены в таблице.

Конструктивно-технологические и упругие свойства покрытий

№ покрытия	Состав покрытия	Технология нанесения покрытия	Толщина покрытия, мм	$E_{п}$, ГПа	$\mu_{п}$	$\Delta\mu$
1	MgAl ₂ O ₄	Газотермическое напыление	0,4	71	0,21	-0,07
2	Ni-Cr-B-Si	То же	0,29	40	0,25	-0,03
3	Ni-Cr-Al-Y	Электронно-лучевое осаждение	0,1	198	0,32	0,04
4	Полимерное	Напыление	0,4	2	0,4	0,12

На рис. 2 точками показаны рассчитанные для испытанных покрытий отношения напряжений $\sigma_{z\max}$, $\sigma_{x\max}$, $\sigma_{\text{экв}}$ к величине максимальных нормальных напряжений $\sigma_{z\max}$, которые определяются для покрытий с коэффициентом Пуассона, равным коэффициенту Пуассона стали 12X18H10T, т.е. при $\mu_{п} = \mu_o = 0,28$. По оси абсцисс отложена величина $\Delta\mu$, равная разнице коэффициентов Пуассона покрытия и основы:

$$\Delta\mu = \mu_{п} - \mu_o. \quad (6)$$

Там же кривыми 1, 2, 3 представлены расчетные зависимости отношений максимальных нормальных и эквивалентных напряжений к величине максимальных нормальных напряжений $\sigma_{z\max}$ при условии $\mu_{п} = \mu_o = 0,28$, построенные соответственно по выражениям (3), (4), (5). Как видно, величины максимальных нормальных и эквивалентных напряжений для различных покрытий хорошо описываются расчетными зависимостями.

Анализ зависимости нормальных напряжений σ_x (на рис. 2 кривая 2) от $\Delta\mu$ показывает, что при $\Delta\mu < 0$ они сжимающие, при $\Delta\mu > 0$ – растягивающие.

Из анализа эквивалентных напряжений (на рис. 2 кривая 3) следует, что при $\mu_{п} = 0,35$, т.е. при $\Delta\mu = 0,07$, их величина минимальна. Таким образом, при проектировании элементов конструкций с покрытиями необходимо стремиться к такой величине $\Delta\mu$, при которой эквивалентные напряжения минимальны.

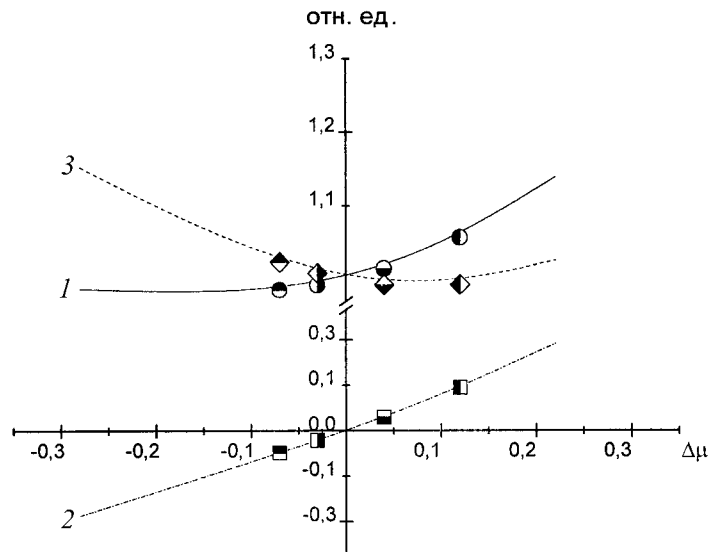


Рис. 2. Изменение относительных нормальных σ_x , σ_z и эквивалентных $\sigma_{\text{экв}}$ напряжений в зависимости от $\Delta\mu$: 1 — $\frac{\sigma_z \text{ max}}{\sigma_z \text{ max}|_{\mu_0=\mu_{\text{II}}}}$; 2 — $\frac{\sigma_x \text{ max}}{\sigma_z \text{ max}|_{\mu_0=\mu_{\text{II}}}}$; 3 — $\frac{\sigma_{\text{экв}}}{\sigma_z \text{ max}|_{\mu_0=\mu_{\text{II}}}}$.

Для испытанного материала основы эквивалентные напряжения в покрытии минимальны при $\mu_{\text{II}} = 0,35$. С увеличением разницы между коэффициентами Пуассона основы и покрытия нормальные напряжения σ_x в последнем возрастают. С повышением уровня сжимающих напряжений σ_x эквивалентные напряжения увеличиваются, в то время как с ростом уровня растягивающих напряжений σ_x они сначала уменьшаются, а затем по достижении определенного значения $\Delta\mu$ увеличиваются. Следовательно, эквивалентные напряжения в зависимости от $\Delta\mu$ сначала уменьшаются, а затем увеличиваются. При некотором значении $\Delta\mu$ системы основа–покрытие эквивалентные напряжения в покрытии минимальны. Растягивающие напряжения σ_x оказывают положительное влияние на эквивалентные напряжения в покрытии, снижая их уровень.

Заключение. Анализ полученных результатов позволяет сделать вывод, что влияние коэффициента Пуассона покрытия на эквивалентные напряжения и соответственно на предельное НС в покрытии следует учитывать при расчетах конструктивных элементов с покрытиями на прочность, а также при экспериментальном определении когезионной прочности при лабораторных испытаниях. При проектировании элементов конструкций с покрытиями необходимо стремиться к снижению величины эквивалентных напряжений.

Резюме

Наведено вирази для розрахунку еквівалентних напружень у покритті. Отримано графіки залежностей еквівалентних напружень від різниці коефіцієнтів Пуассона основи і покриття. Показано, що величини максимальних

нормальных і еквівалентних напружень для різних покриттів добре описуються розрахунковими залежностями. Аналіз отриманих результатів свідчить про необхідність враховувати вплив коефіцієнта Пуассона покриття на еквівалентні напруження і відповідно на граничний напружений стан у покритті при розрахунках конструктивних елементів із покриттями на міцність та при експериментальному визначенні когезійної міцності при лабораторних випробуваннях. При проектуванні елементів конструкцій з покриттями необхідно наближатися до такого співвідношення пружних властивостей основи і покриття, за якого величина еквівалентних напружень у покритті мінімальна.

1. *Chow T. S.* Theory of unsymmetric laminated plates // *J. Appl. Phys.* – 1975. – **46**, No 1. – P. 219 – 221.
2. *Chow T. S., Lin C. A., and Penwell R. C.* Direct determination of interfacial energy between brittle and polymeric films // *J. Polym. Sci.* – 1976. – **14**. – P. 1305 – 1310.
3. *Shield T. W. and Kim K. S.* Beam theory models for thin film segments cohesively bonded to an elastic half space // *Int. J. Sol. Struct.* – 1992. – **29**, No. 9. – P. 1085 – 1103.
4. *Hu M. S. and Evans A. G.* The cracking and decohesion of thin films on ductile substrates // *Acta met.* – 1989. – **37**, No 3. – P. 917 – 925.
5. *Макаренков А. Г., Еричева В. А.* О распределении напряжений в слоистой пластине при растяжении. – Днепропетровск, 1994. – 11 с. – Деп. в ГНТБ Украины 14. 12. 94, № 2454-Ук94.
6. *Шевчук В. А.* Расчет напряженного состояния тел с многослойными тонкими покрытиями // *Пробл. прочности.* – 2000. – № 1. – С. 136 – 150.
7. *Уманский Э. С., Ляшенко Б. А.* Условия адгезионной и когезионной равнопрочности жаростойких покрытий // *Космические исследования на Украине.* – 1975. – Вып. 6. – С. 58 – 64.
8. *Веремчук В. С.* К определению прочностных характеристик элементов конструкций с покрытием повышенной деформативности // *Пробл. прочности.* – 1986. – № 11. – С. 92 – 97.
9. *Веремчук В. С.* Напряженно-деформированное состояние элементов конструкций с покрытием при наличии пластических деформаций // Там же. – № 12. – С. 47 – 52.
10. *Дмитриев Ю. В.* Методологический подход к исследованию механических характеристик материалов с покрытиями: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – Киев, 1990. – 19 с.
11. *Долгов Н. А., Ляшенко Б. А., Веремчук В. С., Дмитриев Ю. В.* К определению характеристик упругости защитных покрытий // *Пробл. прочности.* – 1995. – № 7. – С. 48 – 51.
12. *Долгов Н. А., Ляшенко Б. А., Руцицкий Я. Я. и др.* Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно-деформированное состояние композиции. Сообщ. 1. К оценке напряжений растяжения в покрытии // Там же. – № 9. – С. 37 – 43.

13. Долгов Н. А., Ляшенко Б. А., Руцицкий Я. Я. и др. Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно-деформированное состояние композиции. Сообщ. 2. Распределение напряжений растяжения в покрытии // Там же. – 1996. – № 5. – С. 63 – 67.
14. Долгов Н. А., Ляшенко Б. А., Руцицкий Я. Я. и др. Влияние различия характеристик упругости основы и покрытия на напряженно-деформированное состояние композиции. Сообщ. 3. Распределение касательных и нормальных напряжений в покрытии // Там же. – 1997. – № 6. – С. 66 – 70.
15. Сопротивление материалов / Под. ред. Г. С. Писаренко. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.

Поступила 20. 01. 1999

Аналитический расчет сильного формоизменения первоначально эллиптических пластин

В. А. Ромащенко, В. Н. Сторожук

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

С использованием энергетического подхода получено аналитическое решение для статически нагруженных равномерным давлением эллиптических и круглых пластин, закрепленных по контуру, в случае больших прогибов. Проведено сравнение расчетных данных с экспериментальными.

Ключевые слова: эллиптическая пластина, статика, большие прогибы.

Обозначения

A – работа внешних сил

U – полная внутренняя энергия пластины

a – большая полуось пластины

b – малая полуось пластины

h – толщина пластины

P – давление

ε_i – осредненная интенсивность деформаций

l – длина дуги сегмента эллиптического параболоида

S – площадь поверхности сегмента эллиптического параболоида

r_0 – радиус круглой пластины

Введение. Известно, что для круглых статически нагруженных пластин, испытывающих большие прогибы, существует множество аналитических решений. Как правило, они получены из условия равновесия пластины. В большинстве из них пластические свойства материала учитывались с помощью жесткопластической модели. Решения с учетом упрочнения либо выражены в неявном виде, либо требуют проведения итерационных вычислений, что затрудняет их использование в инженерной практике. При динамическом нагружении круглых пластин широкое распространение получил энергетический подход [1], согласно которому работа пластических деформаций пластины приравнивается к энергии нагружающего импульса. Для уточненных расчетов, как правило, применялись численные методы [2].

В последнее время в листовой штамповке в качестве критерия разрушения широко используются диаграммы предельного формоизменения. Экспериментально подобные диаграммы можно получить при гидравлическим выдавливании с применением матриц с эллиптическими отверстиями. Эллиптические пластины используются также при исследовании плос-

кого двухосного напряженного состояния листовых материалов. Авторам неизвестны аналитические решения для эллиптических пластин при статической нагрузке в случае больших прогибов.

Цель данной работы состояла в аналитическом решении задачи пластического деформирования закрепленной по контуру эллиптической пластины при статическом нагружении с учетом упрочнения материала. Решение получено с использованием энергетического подхода.

Аналитическое решение для эллиптической пластины. Рассмотрим неподвижно закрепленную вдоль контура эллиптическую в плане пластину, находящуюся под воздействием статического равномерного давления P . Будем исследовать случай больших прогибов, когда давление P велико, начальная толщина пластины h_0 достаточно мала, а прогиб центральной точки пластины w_0 удовлетворяет неравенству

$$w_0 > 5h_0.$$

Интерес представляет получение приближенной аналитической зависимости $P(w_0)$, удобной для инженерных расчетов.

Поскольку известно [3], что при больших прогибах главную роль в напряженно-деформированном состоянии (НДС) пластины играют мембранные усилия, с достаточной степенью точности ее можно рассматривать как мембрану, что позволяет использовать безмоментную теорию при определении конечного прогиба. Поэтому в настоящей работе используется мембранное приближение. Аналогичная задача рассматривалась в [4]. Однако приведенное там решение, во-первых, было справедливо “для не очень больших прогибов” и, во-вторых, получено на основе сомнительной гипотезы, суть которой сводилась к замене неподвижного контура подвижным. Предлагаемый ниже подход лишен обоих недостатков.

Для решения поставленной задачи применим энергетический метод [5], согласно которому запишем

$$A = U, \quad (1)$$

где A – работа внешних сил (давления); U – сумма внутренней упругой потенциальной энергии пластины и работы пластического деформирования.

На недеформированной срединной плоскости пластины введем прямоугольные декартовы координаты x, y таким образом, чтобы их начало совпадало с центром пластины, а оси ox и oy – с осями симметрии эллипса. Деформированное положение мембраны хорошо описывается поверхностью эллиптического параболоида [4]:

$$w(x, y) = w_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right), \quad (2)$$

где w – прогиб в произвольной точке срединной поверхности мембраны; a и b – главные полуоси эллипса.

Тогда работу внешнего давления представим так:

$$A = \iint_D \int_0^w P dw dx dy, \quad (3)$$

где наружное двойное интегрирование производится по эллипсу D .
Подставляя (2) в (3) и выполняя ряд преобразований, получаем

$$A = \frac{\pi ab}{2} \int_0^{w_0} P(w_0) dw_0. \quad (4)$$

Правую часть (1) можно записать в виде

$$U = \pi ab h_0 u, \quad (5)$$

где u – осредненная сумма удельной (на единицу объема) внутренней упругой потенциальной энергии пластины и удельной работы пластического деформирования.

Подставляя (4) и (5) в (1) и дифференцируя по w_0 , получаем

$$P = 2h_0 \frac{du}{dw_0}. \quad (6)$$

Для u имеем следующее выражение:

$$u = \int_0^{\varepsilon_i} F(\varepsilon_i) d\varepsilon_i, \quad (7)$$

где $F(\varepsilon_i)$ – диаграмма деформирования; ε_i – осредненная интенсивность деформаций. С учетом (7) формулу (6) можно записать так:

$$P = 2h_0 F(\varepsilon_i) \frac{d\varepsilon_i}{dw_0}. \quad (8)$$

Полагаем величину ε_i равной полусумме интенсивностей деформаций в центре (ε_{ic}) и на неподвижном контуре (ε_{ik}) пластины:

$$\varepsilon_i = (\varepsilon_{ic} + \varepsilon_{ik})/2, \quad (9)$$

текущую толщину h мембраны не зависящей от координат x и y , а материал несжимаемым. Для случаев развитых пластических деформаций последнее предположение вполне оправданно и является традиционным [6].

Рассматривая деформации в центре пластины, можно записать [6]

$$\varepsilon_{ic} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xc} - \varepsilon_{yc})^2 + (\varepsilon_{xc} - \varepsilon_t)^2 + (\varepsilon_{yc} - \varepsilon_t)^2}, \quad (10)$$

где $\varepsilon_{xc}, \varepsilon_{yc}$ – деформации в соответствующих направлениях; ε_t – деформация по толщине,

$$\varepsilon_t = \frac{1}{\lambda} - 1; \quad (11)$$

$$\lambda = \frac{h_0}{h} \geq 1. \quad (12)$$

Из условия несжимаемости следует

$$\lambda = (1 + \varepsilon_{xc})(1 + \varepsilon_{yc}). \quad (13)$$

Для определения ε_{xc} и ε_{yc} кроме (13) необходимо еще одно уравнение. Возьмем произвольную точку K на контуре эллипса, и пусть r – ее расстояние от начала координат. Введем функцию

$$\psi(r) = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{2w_0^2 t^2}{r^2}} dt. \quad (14)$$

Функция (14) характеризует отношение длины соответствующей дуги эллиптического параболоида под радиус-вектором \vec{OK} к ее проекции на плоскость xu , т.е. к r . Полагаем, что относительные длины волокон центра мембраны в направлениях x и y пропорциональны $\psi(a)$ и $\psi(b)$ соответственно:

$$\frac{l_x/l_{0x}}{l_y/l_{0y}} = \frac{\psi(a)}{\psi(b)}, \quad (15)$$

где индекс “0” относится к недеформированным волокнам.

Левая часть (15) – не что иное как $(\varepsilon_{xc} + 1)/(\varepsilon_{yc} + 1)$, а правую часть можно приближенно представить в виде

$$\frac{\psi(a)}{\psi(b)} \approx B(w_0, a, b),$$

где

$$B(w_0, a, b) = \left(1 + \frac{2w_0^2}{3a^2}\right) / \left(1 + \frac{2w_0^2}{3b^2}\right).$$

Таким образом, имеем

$$(\varepsilon_{xc} + 1)/(\varepsilon_{yc} + 1) = B. \quad (16)$$

Решая систему уравнений (13), (16), находим

$$\varepsilon_{yc} = \sqrt{\lambda/B} - 1; \quad \varepsilon_{xc} = \sqrt{\lambda B} - 1. \quad (17)$$

С достаточной для инженерных расчетов точностью можно приближенно считать

$$\begin{aligned} \sqrt{B} &\approx 1 - \delta; \quad \frac{1}{\sqrt{B}} \approx 1 + \delta; \\ \delta &= \frac{w_0^2(a^2 - b^2)}{3a^2b^2 \left(1 + \frac{w_0^2}{3ab}\right)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в (17), а (17) и (11) в (10), получаем

$$\varepsilon_{ic} = \frac{2}{3} \sqrt{\left(\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\right)^2 + 3\lambda\delta^2}.$$

С учетом того, что

$$\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{\lambda} \left[1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{(\sqrt{\lambda} + 1)^2}\right],$$

а выражение в квадратных скобках равно 0,75 при $\lambda = 1$ и 0,76 при $\lambda = 2$, в инженерном приближении можно полагать

$$\sqrt{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \approx \frac{3(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{4\lambda}$$

и окончательно записать

$$\varepsilon_{ic} = \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{\lambda}\right]^2 + \lambda\beta^2}, \quad (19)$$

где

$$\beta^2 = \frac{16}{3} \delta^2. \quad (20)$$

Рассмотрим теперь деформированное состояние вблизи закрепленного контура пластины. Деформация в направлении касательной к контуру равна нулю, толщинная по-прежнему определяется (11), а деформация в направлении нормали к контуру вычисляется из условия несжимаемости

$$\varepsilon_{in} = \lambda - 1. \quad (21)$$

Подставив (11) и (21) в формулу, аналогичную (10), получим

$$\varepsilon_{ic} = \frac{2(\lambda - 1)}{3\lambda} \sqrt{1 + \lambda + \lambda^2}.$$

Поскольку

$$1 + \lambda + \lambda^2 = (1 + \lambda)^2 \left[1 - \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2} \right],$$

а выражение в квадратных скобках равно 0,75 при $\lambda = 1$ и 0,77 при $\lambda = 2$, в инженерном приближении можно полагать

$$1 + \lambda + \lambda^2 = 3(1 + \lambda)^2 / 4,$$

и таким образом для ε_{ik} запишем

$$\varepsilon_{ik} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda\sqrt{3}}. \quad (22)$$

Подставив (19) и (22) в (9), получим

$$\varepsilon_i = \frac{1}{4} \sqrt{\left[\frac{(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{\lambda} \right]^2} + \lambda\beta^2 + \frac{\lambda^2 - 1}{2\lambda\sqrt{3}}. \quad (23)$$

Для завершения решения задачи необходимо λ выразить через w_0 . Условие несжимаемости применительно к объему всей пластинки дает:

$$\lambda = \frac{S}{\pi ab}, \quad (24)$$

где S – площадь срединной поверхности деформированной мембраны (сегмент эллиптического параболоида).

Можно показать, что точное значение S таково:

$$S = \frac{a^3 b^3}{3w_0^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\left[1 + \frac{4w_0^2}{a^2 b^2} (b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi) \right]^{3/2} - 1}{b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (25)$$

Интеграл (25) не выражается в элементарных функциях, поэтому для его вычисления применяем приближенный метод. Заметим, что выражение $a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi$ равно b^2 при $\varphi = 0$, a^2 при $\varphi = \pi/2$ и $(a^2 + b^2)/2$ при $\varphi = \pi/4$. В этом случае полагаем

$$a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi \approx (a^2 + b^2)/2 = \text{const.} \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25), получаем

$$S = \frac{\pi a^3 b^3}{3w_0^2(a^2 + b^2)} \left\{ \left[1 + \frac{2w_0^2(a^2 + b^2)}{a^2 b^2} \right]^{3/2} - 1 \right\}. \quad (27)$$

Формула (27) дает хорошее инженерное приближение для площади S : во-первых, при $a = b$ она переходит в известное точное выражение для площади поверхности сегмента параболоида вращения, во-вторых, в пределе $w_0 \rightarrow 0$ дает площадь эллипса πab и, в-третьих, имеет хорошую асимптотику даже при $b \rightarrow 0$:

$$\lim_{b \rightarrow 0} S = aw_0 \frac{2\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Точная асимптотика $b = 0$ такова:

$$S_T = aw_0 \frac{8}{3};$$

$$\left(\lim_{b \rightarrow 0} S \right) / S_T = \pi/2\sqrt{2} \approx 1,1.$$

Таким образом, приближение (27) можно с достаточной степенью точности использовать практически всегда, даже для очень вытянутых эллипсов, для которых $a/b \gg 1$.

Из (27) и (24) имеем

$$\lambda = \frac{a^2 b^2}{3w_0^2(a^2 + b^2)} \left\{ \left[1 + \frac{2w_0^2(a^2 + b^2)}{a^2 b^2} \right]^{3/2} - 1 \right\}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (23), а (23) в (8), получаем окончательное решение задачи. Его удобно записать в безразмерных переменных

$$q = \frac{P\sqrt{ab}}{Eh_0}; \quad \Phi(\xi) = F(\xi)/E; \quad \eta = w_0^2/ab, \quad (29)$$

где E – модуль Юнга, следующим образом:

$$\left\{ \begin{aligned}
 q &= 4\sqrt{\eta}(A_1B_1 + A_2B_2)\Phi(\varepsilon_i); \\
 A_1 &= [\lambda^3(1 + \theta) + \lambda - 2 + \sqrt{\lambda}(\lambda^2 + 2\lambda - 3)]/8\lambda^3R + (\lambda^2 + 1)/2\lambda^2\sqrt{3}; \\
 A_2 &= \lambda/8R; \\
 B_1 &= [1 + (2C\eta - 1)\sqrt{1 + 4C\eta}]/6C\eta^2; \\
 B_2 &= 128(C^2 - 1)\eta/(3 + \eta)^3; \\
 R &= \sqrt{\left[\frac{(\lambda - 1)(\sqrt{\lambda} + 1)}{\lambda}\right]^2 + \lambda\theta}; \\
 \theta &= \frac{64}{3}(C^2 - 1)[\eta/(3 + \eta)]^2; \quad \lambda = [(1 + 4C\eta)^{3/2} - 1]/6C\eta; \\
 C &= (a^2 + b^2)/2ab; \quad \varepsilon_i = R/4 + (\lambda^2 - 1)/2\lambda\sqrt{3}.
 \end{aligned} \right. \quad (30)$$

Частный случай. *Круглая пластина.* Для круглых пластин ($a = b = r_0$) решение (30) значительно упрощается, поскольку в этом случае $C = 1$ и $\theta = B_2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{q} &= \frac{1}{3\sqrt{3}\xi\sqrt{\zeta}} \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{\omega}} \left(1 + \frac{1}{\omega} \right) + \frac{1 + \sqrt{3}/2}{\omega^2} \right] \times \\
 &\times [1 + (2\zeta - 1)\sqrt{1 + 4\zeta}] \Phi \left[\frac{\omega - 1}{4\omega\sqrt{3}} (2\omega + 2 + \sqrt{3\omega} + \sqrt{3}) \right]; \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\tilde{q} = Pr_0/Eh_0; \quad \zeta = w_0^2/r_0^2; \quad \omega = [(1 + 4\zeta)^{3/2} - 1]/6\zeta.$$

Решение (31) для круглых пластин получено ранее [7]. В случае упругих мембран ($\Phi(\zeta) = \zeta$) и малых прогибов формулы (31) хорошо согласуются с известными решениями [5]. Предельный переход $w_0 \rightarrow 0$ в (31) дает $w_0 = 0,602r_0\tilde{q}^{1/3}$, а в [5] соответствующий коэффициент равен 0,662. Это различие можно объяснить тем, что в [5] рассматривались сжимаемые материалы (коэффициент Пуассона $\nu = 0,25$), т.е. менее жесткие пластины.

Преимущество полученных решений перед классическими заключается в том, что выражения (30), (31) можно использовать без заметной потери точности при очень больших прогибах пластины, когда параметры η или ζ могут принимать значения, близкие к единице и даже больше. При этом в асимптотике $w_0 \rightarrow 0$ указанные формулы совпадают с хорошо известными мембранными решениями для умеренных прогибов.

В табл. 1, 2 приведено сравнение экспериментальных данных [8, 9] с расчетными для эллиптических пластин. Для круглых пластин расчетные данные сравнивались с экспериментальными, приведенными в [8, 10] (рис. 1 и 2). В обоих случаях расхождение между теорией и экспериментом не превышало 10%.

Т а б л и ц а 1

Сравнение прогибов в центральной точке эллиптических пластин, полученных по формуле (30), с экспериментальными данными [8] (материал – сталь 08кп, $a = 0,1$ м, толщина $0,82 \cdot 10^{-3}$ м)

b/a	P , МПа	$w_{\text{эксп}} \cdot 10^3$, м	$w_{\text{теор}} \cdot 10^3$, м
0,375	6,86	20,4	18,9
	8,04	25,6	25,0
0,500	4,90	22,2	21,3
	5,88	26,4	26,9
	7,06	38,9	40,8
0,750	3,43	27,3	26,5
	4,12	32,2	31,2
	5,48	42,6	46,6

Т а б л и ц а 2

Сравнение прогибов в центральной точке эллиптических пластин, полученных по формуле (30), с экспериментальными данными [9] (материал – медь М3, $a = 0,055$ м, толщина $0,49 \cdot 10^{-3}$ м)

b/a	P , МПа	$w_{\text{эксп}} \cdot 10^3$, м	$w_{\text{теор}} \cdot 10^3$, м
0,333	$4,58 \pm 0,29$	$20,0 \pm 0,48$	21,3
0,667	$4,53 \pm 0,46$	$10,5 \pm 1,50$	11,3

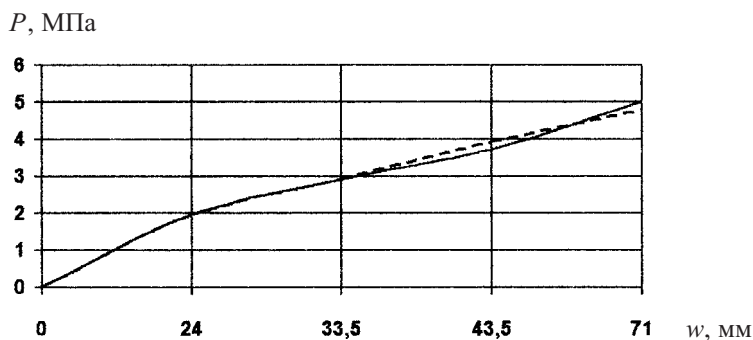


Рис. 1. Экспериментальная [8] – штриховая линия и рассчитанная по формуле (31) – сплошная линия зависимости давления от прогиба круглой пластины из стали 08кп толщиной $0,82 \cdot 10^{-3}$ м и радиусом 0,1 м.

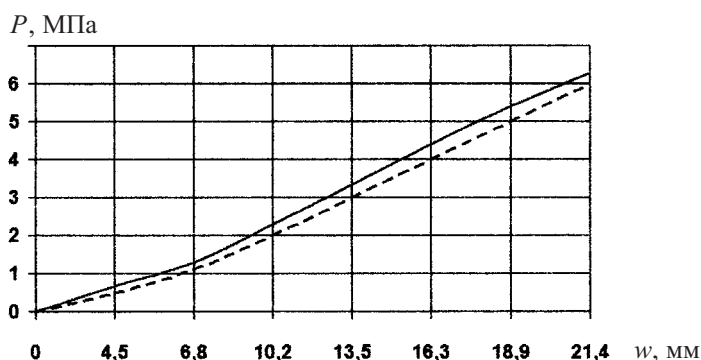


Рис. 2. Экспериментальная [10] – штриховая линия и рассчитанная по формуле (31) – сплошная линия зависимости давления от прогиба круглой пластин из меди М3 толщиной $1 \cdot 10^{-3}$ м и радиусом 0,051 м.

Заключение. Использование энергетического подхода позволило получить аналитическое решение для статически нагруженных равномерным давлением эллиптических и круглых пластин, закрепленных по контуру и испытывающих большие прогибы. Сравнение расчетных данных с экспериментальными показало, что полученные выражения пригодны для инженерных расчетов.

Резюме

На основі енергетичного підходу отримано аналітичний розв'язок для статично навантажених рівномірним тиском закріплених по контуру еліптичних і круглих пластин, що зазнають великих прогинів. Порівняння розрахункових даних з експериментальними показало, що отримані формули можуть застосовуватися для інженерних розрахунків.

1. *Nurick G. N. and Martin J. B.* Deformation of thin plates subjected to impulsive loading. Pt. 1, 2. A review // *J. Impact Engng.* – 1989. – **8**, No. 2. – P. 159 – 186.
2. *Ромащенко В. А.* Метод исследования неосесимметричного динамического формоизменения разрушаемых оболочек. Сообщ. 1. Теория и численный метод // *Пробл. прочности.* – 1996. – № 3. – С. 5 – 19.
3. *Галиев Ш. У., Бабич Ю. Н., Жураховский С. В. и др.* Численное моделирование волновых процессов в ограниченных средах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 200 с.
4. *Nadai W.* Theory of Flow and Fracture of Solids. – New York: McGraw-Hill, 1963. – Vol. 2. – 705 p.
5. *Timoshenko S. P. and Woinowsky-Krieger S.* Theory of Plates and Shells. – New York: McGraw-Hill, 1959. – 605 p.
6. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – М.: Машиностроение, 1975. – 400 с.
7. *Ромащенко В. А., Сторожук В. Н.* Энергетический подход к решению задачи статически нагруженных круглых пластин, испытывающих большие прогибы // *Тр. Междунар. конф. “Оценка и обоснование продления ресурса элементов конструкций”* (Киев, 6–9 июня 2000 г.). – Киев: Ин-т пробл. прочности НАН Украины, 2000. – С. 509 – 514.
8. *Головлев В. Д.* Об особенностях металла к глубокой вытяжке // *Новые процессы обработки металлов давлением.* – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – С. 135 – 143.
9. *Ромащенко В. А., Сторожук В. Н.* Методы исследования неосесимметричного динамического формоизменения разрушаемых оболочек. Сообщ. 2. Расчеты и эксперимент // *Пробл. прочности.* – 1996. – № 4. – С. 41 – 48.
10. *Мисевич Ю., Рудис М. А.* Большие пластические деформации круглых плоских мембран при статических и динамических нагрузках // *Прикл. механика.* – 1981. – **17**, № 1. – С. 86 – 92.

Поступила 20. 04. 2001

Микро- и макроскорость роста усталостной трещины в сталях и сплавах под влиянием закрытия трещины

И. С. Пиняк

Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

На основе экспериментальных данных показано, что различие между макро- и микро- скоростью роста усталостной трещины на втором участке кинетической диаграммы усталостного разрушения обусловлено закрытием трещины в пределах его наличия. Установлены зависимости между макро- и микро- скоростью роста усталостной трещины, а также структурой материала на втором участке при разных асимметриях цикла нагружения с учетом влияния закрытия трещины. Создана методика экспертизы разрушения конструкционных материалов по микро- и макроскорости роста усталостной трещины.

Ключевые слова: макро- и микро- скорость роста усталостной трещины, плато, шаг бороздки, закрытие трещины, асимметрия цикла.

Обозначения

da / dN	– скорость роста усталостной трещины (РУТ)
$(da / dN)_{II,R}$	– скорость РУТ на втором участке кинетической диаграммы усталостного разрушения (КДУР) при разных асимметриях цикла
R, R^*	– коэффициенты асимметрии цикла нагружения при наличии и отсутствии закрытия трещины (ЗТ)
$S, S_{II,eff-R}$	– соответственно шаг усталостной бороздки (расстояние между серединами соседних выступов или впадин), ее шаг на втором участке КДУР при разных асимметриях R, R^* цикла
K_{min}, K_{max}	– минимальный и максимальный коэффициенты интенсивности напряжений (КИН) в цикле
K_{op}, K_{cl}	– соответственно КИН раскрытия и закрытия трещины в цикле
$\Delta K = K_{max} - K_{min}; \Delta K_R$	– номинальный размах КИН в цикле при одной и разных асимметриях R
$\Delta K_{cl}^{op} = K_{op} - K_{min}$	– характеристика закрытия трещины в цикле
$\Delta K_{eff} = \Delta K - \Delta K_{cl}^{op}$	– эффективный размах КИН в цикле
$\Delta K_{th}, \Delta K_{th,eff}, \Delta K_{fcl.th}$	– соответственно пороговый и пороговые эффективный, критический эффективный размахи КИН в цикле

$\Delta K_{fcl,0}, \Delta K_{fcl}, \Delta K_{fcl,R}$	– критический эффективный размах КИН в цикле соответственно при нулевой, единичной и разных асимметриях цикла нагружения
$\Delta K_{fcl.th,R}$	– критический эффективный пороговый размах КИН в цикле при разных асимметриях
$\Delta K_{eff1-2}, \Delta K_{1-2,R}, \Delta K_{2-3,R}$	– эффективный размах КИН и размахи КИН в цикле, соответствующие началу и концу второго участка КДУР при разных асимметриях цикла
C_1, C_2, n_1, n_2	– характеристики материала
f	– частота нагружения образца
l_z	– размер зерна
m_z	– количество бороздок усталости в зерне
ΔK_{cl}^{pl}	– характеристика ЗТ в цикле, определяемая механизмом Элбера
$\Delta K_{cl}^{ox+\gamma rg}$	– характеристика ЗТ в цикле, определяемая окислами и шероховатостью на поверхности излома

Введение. Развитие количественной фрактографии позволило установить зависимость особенностей рельефа поверхности излома от параметров нагружения и характеристик циклической трещиностойкости. Вместе с тем появилась возможность прогнозирования характеристик трещиностойкости по микростроению рельефа поверхности излома для случаев разрушения элементов конструкций при эксплуатации.

Экспертиза разрушения включает в себя микрофрактографический анализ рельефа поверхности излома, т.е. определение шага усталостных бороздок [1–7], являющихся наиболее информативной характеристикой микро-рельефа усталостных изломов. Представляет также интерес установление аналитической связи (путем сопоставления) между макроскоростью, кинетикой роста усталостной трещины (параметрами циклической трещиностойкости, определенными экспериментально) [8, 9] и так называемой микроскоростью, определяемой путем измерения расстояния между соседними бороздками (шага бороздок) в изломе.

Результаты таких исследований, приведенные в работах [6, 7, 10–17], иллюстрируют линейные (в логарифмических координатах на втором участке КДУР) экспериментальные зависимости макроскопической скорости da/dN и шага бороздок S от номинального размаха коэффициента интенсивности напряжений ΔK , которые часто пересекаются в области значения скорости $da/dN = 10^{-7}$ м/цикл. Указанные зависимости свидетельствуют об усилении несоответствия между макро- и микроскоростью распространения трещины в низко- и высокоамплитудной области кинетической диаграммы усталостного разрушения соответственно по мере снижения и повышения ΔK . На начальной стадии роста трещины микроскорость, как правило, превышает макроскорость, тогда как в высокоамплитудной области имеет место обратная связь. В области пересечения этих зависимостей фиксируется

удовлетворительное соответствие наблюдаемых в изломе бороздок с числом циклов нагружения [15]. Удовлетворительная корреляция между шагом бороздок и макроскоростью в достаточно широком интервале скоростей отмечена в следующих работах: в [12] для алюминиевых сплавов 7075-T6 и 2024-T3 он составляет $4 \cdot 10^{-8} \dots 10^{-6}$ м/цикл; в [6, 13] для низкоуглеродистых сталей (0,03...0,05%С) – $10^{-7} \dots 2 \cdot 10^{-6}$ м/цикл. Обзор исследований интервалов соответствия между макро- и микроскоростью РУТ сделан в работе [16].

В [17] показан сложный характер зависимости da / dN и S от КИН K_{\max} . Установлено, что макро- и микроскорости РУТ близки между собой в интервале $8 \cdot 10^{-7} \dots 4 \cdot 10^{-6}$ м/цикл. Ниже $da / dN = 8 \cdot 10^{-7}$ м/цикл и до начала второго участка КДУР шаг бороздок практически постоянен, тогда как на первом участке отмечается уменьшение межбороздчатых расстояний по мере снижения K_{\max} .

Исследования стали 12Г2А [10] убедительно подтверждают, что макро- и микроскорости РУТ зависят от коэффициента асимметрии цикла нагружения R . Так, при $R = 0$ и $0,5$ зависимости шага бороздок в изломе и макроскорости РУТ от размаха КИН ΔK представлены в виде пересекающихся линий (особенности образования таких областей пересечения отмечены в работе [15]). При симметричном растяжении–сжатии ($R = -1$) скорость РУТ, определенная микрофрактографическим методом, адекватна скорости, измеренной на боковой поверхности образца.

В [14] установлено хорошее соответствие между значениями макро- и микроскорости РУТ в титановом сплаве при частоте нагружения 20 Гц, при снижении частоты до 0,2 Гц эти значения отличаются.

В работе [18] на примере алюминиевого сплава 2024-T3 и стали М50 (0,13%С) показано, что с уменьшением частоты нагружения увеличиваются межбороздчатые расстояния. Там же получена экспериментальная зависимость шага бороздок S от размаха КИН ΔK и частоты f нагружения.

В [19] предложена зависимость шага бороздок S от эффективного размаха КИН ΔK_{eff} , учитывающего величину среднего напряжения посредством некоторой функции коэффициента асимметрии R цикла нагружения $\Delta K_{eff} = (0,5 + 0,4R)\Delta K$. Указанная зависимость характеризуется меньшим разбросом экспериментальных данных по сравнению с зависимостью $S - \Delta K$. Функциональные связи S и ΔK_{eff} при разных частотах нагружения, хотя и зависят от последних, все же находятся в одной полосе разброса зависимостей $S - \Delta K$ [15, 19]. Шаг бороздок S связан с ΔK_{eff} степенным соотношением типа

$$S = B \left(\frac{\Delta K_{eff}}{E} \right)^p, \quad (1)$$

где B , p – константы; E – модуль упругости. Однако достоверность определения эффективного размаха КИН ΔK_{eff} в границах наличия закрытия трещины [19] низкая из-за отсутствия методики текущего раскрытия вер-

шины трещины. В связи с этим расширяется полоса разброса зависимостей $S - \Delta K_{eff}$ и уменьшается интервал совпадения макро- и микроскорости РУТ.

Согласно известным данным [1–3, 6, 7, 15–24], для определенного класса материалов и условий испытаний существует интервал скоростей РУТ, в котором происходит формирование одной бороздки за цикл нагружения. Таким интервалом можно считать область значений скоростей РУТ от 10^{-8} до 10^{-6} м/цикл [7, 12, 15, 16, 22–24]. Важным представляется тот факт [15, 25], что для различных классов металлических материалов и условий испытаний область наилучшей корреляции между макро- и микроскоростью находится в области значения скорости 10^{-7} м/цикл, т.е. на среднем участке КДУР. Именно при этой скорости отмечается совпадение макро- и микроскорости РУТ [26].

В работах [16, 22] обобщенная зависимость S от ΔK , совмещенная с КДУР, показана в виде S-образной кривой. Она имеет плато (горизонтальный участок, параллельный оси абсцисс) в области низких и высоких скоростей РУТ. Между плато лежит область совпадения макро- и микроскорости РУТ. Начало интервала совпадения обозначено пороговыми размахом КИН ΔK_s и скоростью $(da/dN)_s$, которая чаще всего близка к скорости $da/dN = 10^{-7}$ м/цикл – “точки вращения” [16, 25].

Автор работы [27] принял наибольший КИН K^* при скорости РУТ, равной $(da/dN)^* = 10^{-7}$ м/цикл, и описал средний участок КДУР выражением

$$da/dN = (da/dN)^* \left(\frac{K_{max}}{K^*} \right)^n, \quad (2)$$

где n – характеристика материала.

По мнению авторов [15, 27], параметр K^* приобретает физический смысл КИН, по достижении которого за один цикл нагружения образуется одна бороздка в изломе. Если $K_{max} < K^*$, то для подрастания трещины на расстояние, соответствующее шагу бороздки, требуется более одного цикла нагружения. При $K_{max} \geq K^*$ формирование одной бороздки может происходить за время, равное или меньше одного цикла, что сопровождается ускорением распространения усталостной трещины. Момент такого ускорения роста трещины для различных материалов и структурных состояний определяется разными значениями параметра K^* , который таким образом становится структурно-чувствительной характеристикой циклической трещиностойкости материала. Наблюдаемое при $K_{max} > K^*$ несоответствие между числом циклов нагружения и количеством бороздок в изломе, по мнению ряда исследователей, обусловлено реализацией наряду с бороздками микро-механизмов разрушения статического типа (сколов, ямочного отрыва, расщелений по плоскости скольжения).

В работе [16] отмечается, что при больших скоростях развития трещины (в области высоких значений ΔK) несоответствие между макро- и микроскоростью РУТ связано с действием механизмов статического разру-

шения, приводящих к появлению ямок, фасеток скола, фасеток межзеренного разрушения. Кроме того, РУТ может ускоряться вследствие хрупкого разрушения, вызванного образованием микротрещин на частицах [4], или в результате выпрямления фронта [26]. При низких скоростях РУТ (в области низких значений ΔK) причины несоответствия не столь однозначны и могут быть связаны с влиянием среды, структуры материала, геометрии образца и фронта трещины, с разрешающей способностью электронного микроскопа, с дискретностью процесса роста трещины, с механизмом образования бородок.

Проанализировав исследования разных авторов, возникает следующий вопрос: “Какова же истинная причина несоответствия между макро- и микроскоростью РУТ на втором участке КДУР”.

Для ответа на этот вопрос воспользуемся работами [28–32]. Здесь важным является тот факт, что для различного класса металлических материалов и условий испытаний в пределах, определяемых экспериментально, от критического эффективного порогового размаха КИН $\Delta K_{fcl.th,R}$ до критического эффективного размаха КИН $\Delta K_{fcl,R}$ присутствует явление закрытия вершины усталостной трещины в каждом цикле нагружения до уровня КИН K_{op} , соответствующего началу полного раскрытия трещины по толщине образца. Учет влияния закрытия трещины, выраженного через эффективный размах КИН ΔK_{eff} и определяемого методом измерения текущего (непрерывного) раскрытия вершины трещины [30], позволяет ответить на поставленный вопрос.

В связи с этим в настоящей работе предпринята попытка установить зависимость между макро- и микроскоростью роста усталостной трещины на втором участке кинетической диаграммы усталостного разрушения с учетом влияния закрытия вершины усталостной трещины.

О причинах несоответствия между макро- и микроскоростью роста усталостной трещины на втором участке кинетической диаграммы усталостного разрушения. Для различных металлических материалов и условий испытаний в работах [28–30] и на рис. 1 показано, что если номинальный размах КИН ΔK в цикле находится в пределах $\Delta K_{fcl.th,R} \geq \Delta K \geq \Delta K_{fcl,R}$, то явление закрытия–раскрытия (смыкание–размыкание) трещины в цикле отсутствует и не оказывает влияния на скорость РУТ. Однако при $\Delta K_{fcl,R} > \Delta K_{eff} > \Delta K_{fcl.th,R}$ имеет место закрытие–открытие трещины и оказывает влияние на скорость РУТ. Поэтому в указанном диапазоне нагрузок необходима оценка кинетики РУТ с помощью эффективного размаха КИН ΔK_{eff} (вместо номинального ΔK), который стимулирует скорость роста усталостной трещины в верхней части растягивающей половины цикла нагружения, учитывает влияние закрытия трещины [28] и определяется как разность

$$\Delta K_{eff} = \Delta K - \Delta K_{cl}^{op}. \quad (3)$$

В нижней части растягивающей половины цикла нагружения усталостная трещина остается закрытой, а ее характеристика закрытия ΔK_{cl}^{op} определяется как разность [29]:

$$\Delta K_{cl}^{op} = K_{op} - K_{min} \quad (4)$$

Таким образом, эффективный размах КИН ΔK_{eff} при заданном номинальном размахе КИН ΔK будет в основном зависеть от характеристики закрытия трещины ΔK_{cl}^{op} .

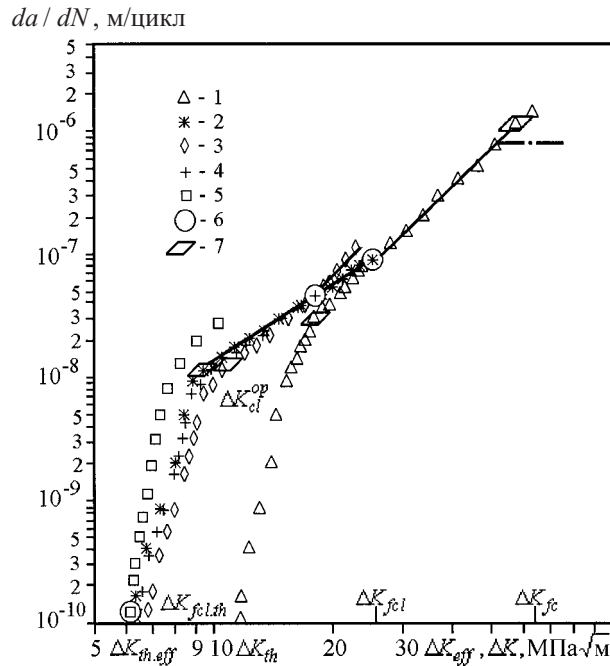


Рис. 1. Зависимость скорости роста усталостной трещины da/dN от ΔK (1, 3, 5), ΔK_{eff} (2, 4) для стали 30Л-1 при комнатной температуре и различной асимметрии цикла: 1, 2 – $R = 0,1$; 3, 4 – $R = 0,6$; 5 – $R = 0,7$; 6 – момент исчезновения закрытия трещины при исследованных асимметриях цикла R (соответствует $\Delta K_{fcl,R}$); 7 – начало второго участка КДУР при разных асимметриях R (соответствует $\Delta K_{1-2,R}$), при эффективном размахе КИН ΔK_{eff} (соответствует ΔK_{eff1-2}) и его конец (соответствует $\Delta K_{2-3,R}$).

Можно предположить, что экспериментально полученная зависимость характеристики ЗТ ΔK_{cl}^{op} от номинального размаха КИН ΔK (рис. 2) отображает и обобщает учет влияния действующих механизмов закрытия вершины усталостной трещины (шероховатость, окислы и фреттинг-коррозия на поверхностях излома, размер циклической пластической зоны в вершине усталостной трещины с пластическим потоком вдоль ее берегов) на кинетику ее роста в материале (рис. 1). При этом оказывается, что закрытие трещины представляет собой “запас” циклической трещиностойкости материала, который позволяет (в пределах наличия явления смыкания–размыкания трещины) процессу разрушения протекать одинаково, независимо от асимметрии цикла нагружения и других факторов (*Авт.*), а зависимость $\Delta K_{cl}^{op} - \Delta K$ выступает в роли измерения этого запаса. Подтверждением сказанному является инвариантность КДУР в пределах наличия закрытия трещины (см. рис. 1 и работы [28–30]).

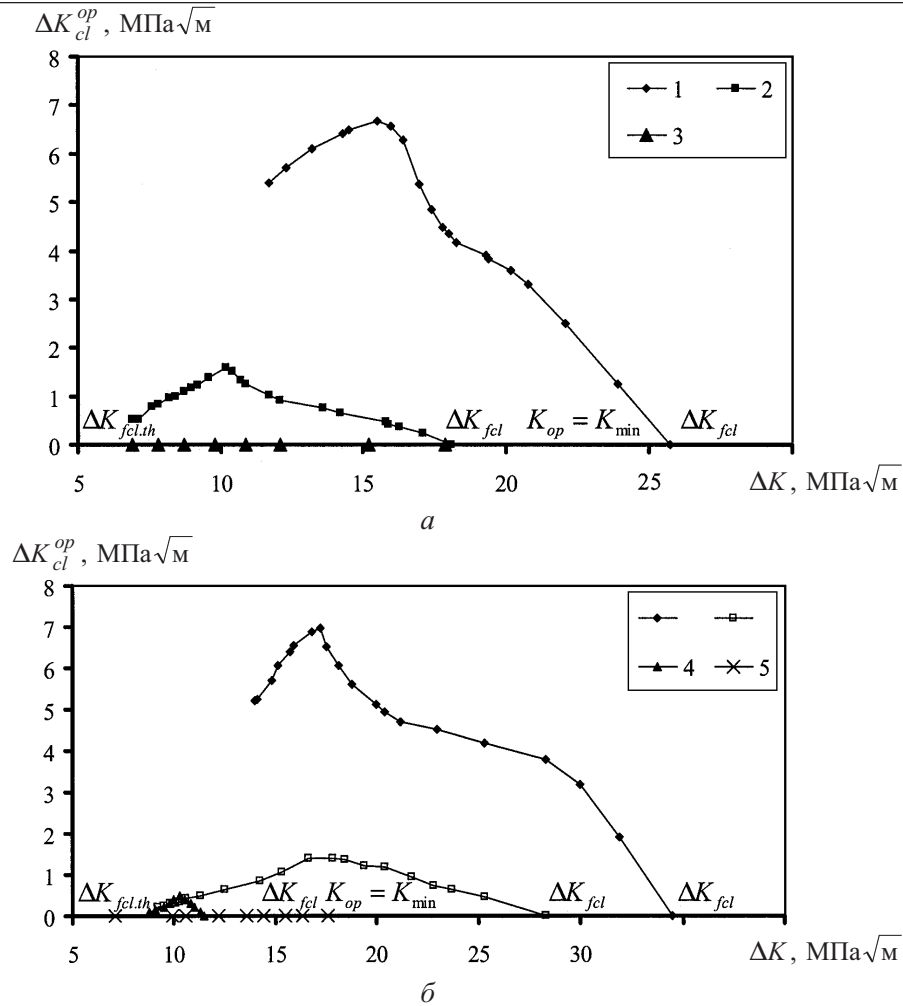


Рис. 2. Зависимость характеристики закрытия трещины ΔK_{cl}^{op} от номинального размаха КИН ΔK для сталей 30L-1 (а) и D9H (б) при $T = 293$ К, частоте нагружения $f = 15$ Гц и различной асимметрии цикла: 1 – $R = 0,1$; 2 – $R = 0,6$; 3 – $R = 0,7$; 4 – $R = 0,65$; 5 – $R = 0,75$.

Кроме того, необходимо отметить, что среди механизмов закрытия трещины главная роль в обеспечении инвариантности эффективных КДУР к разным факторам на втором и третьем (при наличии эффекта ЗТ) участках принадлежит механизму Элбера – размер циклической пластической зоны в вершине усталостной трещины с пластическим потоком вдоль ее берегов.

Для исследованных ранее [28, 29] сталей D9H и 30L-1 на рис. 3 схематически показано, что в каждом цикле нагружения до N_{i+x} при КИН K_{max} имеет место только механизм Элбера. Он представляет собой лишь реальную (не идеальную, которая присуща идеальной трещине, т.е. острый надрез нулевой ширины) пластическую зону в вершине трещины, на которую воздействует неразрушенная часть сечения. Пластический поток отсутствует, но затем появляется снова в цикле и вместе с другими механизмами ЗТ закрывает вершину трещины при значениях КИН от K_{cl} до K_{op} . В N_{i+x} цикле нагружения пластический поток (наличие на берегах реальной уста-

лостной трещины пластически деформированного материала, увеличенного в размерах по сравнению с исходным недеформированным материалом) окончательно переходит в реальную пластическую зону в вершине трещины при равенстве КИН раскрытия вершины трещины K_{op} и минимального K_{min} (при критическом эффективном размахе КИН $\Delta K_{fcl,R}$ и эффективном пороговом размахе КИН $\Delta K_{fcl.th,R}$, нижней и верхней границе роста трещины при наличии эффекта закрытия трещины). После наступления равенства КИН $K_{op} = K_{min}$ трещина в цикле остается постоянно раскрытой, а пластический поток вдоль ее берегов отсутствует. Существует только реальная пластическая зона в вершине усталостной трещины.

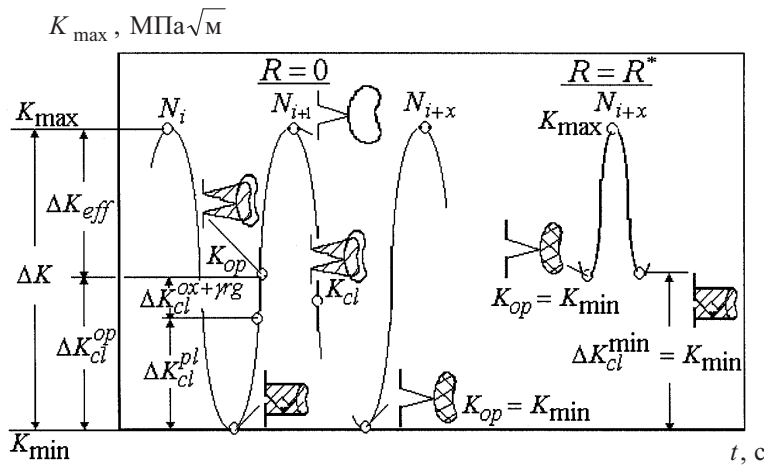


Рис. 3. Модель поведения пластического потока в исследованных сталях 30L-1 и D9H.

При исследовании трубной стали 17ГС разных модификаций такого перехода не наблюдается, по-видимому, из-за образования при высоких значениях номинального размаха КИН ΔK (ближе к критическому значению размаха КИН ΔK_{fc}) вдоль магистральной трещины множества коротких трещин. Следствием существования у вершин коротких трещин реальных пластических зон, видимо, является образование общего пластического потока вдоль магистральной трещины (присутствует практически до разрушения образца), который ее закрывает и не позволяет корректно определить критический размах КИН ΔK_{fc} . Это явление требует тщательного изучения с помощью методики измерения текущего раскрытия вершины усталостной трещины.

Зависимости $\Delta K_{cl}^{op} - \Delta K$ (рис. 2) иллюстрируют поведение характеристики закрытия трещины ΔK_{cl}^{op} , которая отсутствует ($\Delta K_{cl}^{op} = 0$) при критическом эффективном размахе КИН $\Delta K_{fcl,R}$: для стали 30L-1 при $R = 0,1$ и $0,6$, для стали D9H при $R = 0,1; 0,6$ и $0,65$. Для указанных сталей при $R^* = 0,7$ и $0,75$ закрытие трещины в цикле исчезает уже на пороге трещиностойкости при $\Delta K_{fcl.th,R}$ (рис. 1, [30]), и тогда $\Delta K_{cl}^{op} = 0$, а $K_{op} = K_{min}$ (на оси абсцисс рис. 2 прямая линия).

По-видимому, закрытие трещины (в пределах его наличия) оказывает существенное влияние на макро- и микроскорости роста усталостной трещины на втором участке кинетической диаграммы усталостного разрушения (рис. 1, 2). Значит, можно предположить, что бороздка усталости S будет образовываться в цикле N только под влиянием эффективного размаха КИН ΔK_{eff} . При нагрузке ΔK_{cl}^{op} (трещина закрыта) бороздка усталости не развивается. В связи с этим можно заключить, что появление противоречивых высказываний [1–27] относительно различия между макро- и микроскоростью РУТ на втором участке КДУР обусловлено неучетом границ наличия закрытия трещины от критического эффективного порогового размаха КИН $\Delta K_{fcl,th,R}$ до критического эффективного размаха КИН $\Delta K_{fcl,R}$ (рис. 1) и зависимости характеристики закрытия трещины ΔK_{cl}^{op} от номинального размаха КИН ΔK (рис. 2). Зависимость $\Delta K_{cl}^{op} - \Delta K$ свидетельствует о влиянии закрытия трещины на кинетику РУТ и позволяет определять постоянно изменяющийся эффективный размах КИН ΔK_{eff} (3) вплоть до момента исчезновения закрытия трещины $\Delta K_{fcl,R}$. Границы наличия закрытия трещины и зависимости $\Delta K_{cl}^{op} - \Delta K$ определяются с помощью созданной методики измерения текущего раскрытия вершины трещины, частично описанной в [30].

Таким образом, плато в области низких скоростей РУТ на зависимости $S - \Delta K$, совмещенной с КДУР [16, 22], есть не что иное как отражение влияния явления закрытия трещины на кинетику РУТ. Учет этого влияния через характеристику трещиностойкости ΔK_{eff} , определенную по методу текущего раскрытия вершины трещины, позволяет достоверно описать это плато и расширить область соответствия макро- и микроскорости роста усталостной трещины на втором участке КДУР вплоть до характеристики $\Delta K_{fcl,R}$. Совпадение макро- и микроскорости РУТ показано на рис. 1 сплошными линиями при разных асимметриях цикла.

Выше уровня нагрузки $\Delta K_{fcl,R}$, когда закрытие трещины отсутствует, бороздка усталости образуется в цикле уже под воздействием номинального размаха КИН ΔK . Момент развития трещины под воздействием величины ΔK дает возможность сформировать одну бороздку усталости за время, равное одному циклу нагружения. Следует полагать, что за один цикл нагружения образуется одна бороздка усталости в изломе вплоть до конца второго участка КДУР. Однако возможно и несоответствие между макро- и микроскоростью РУТ, обусловленное появлением механизмов статического типа (фасеток скола и межзеренного разрушения, ямочного отрыва, расслоений по плоскостям скольжения). Влияние механизмов такого типа, а также ряд других причин [4, 15, 16, 22, 26] приведут к несоответствию между макро- и микроскоростью РУТ или образованию плато в области высоких скоростей РУТ на зависимости $S - \Delta K$, совмещенной с КДУР (на рис. 1 штрихпунктирная линия).

Зависимость между макро- и микроскоростью роста усталостной трещины на втором участке КДУР при разных асимметриях цикла нагружения с учетом влияния закрытия трещины. На основе изложенного выше можно заключить, что макро- и микроскорости роста усталостной трещины на втором участке КДУР будут совпадать при разных асимметриях цикла нагружения (могут быть и другие факторы), если кинетику РУТ оценивать с помощью эффективного размаха КИН ΔK_{eff} до верхней границы роста трещины при наличии явления ее смыкания–размыкания. Согласно работам [31, 32] и рис. 1, скорости РУТ будут равны:

$$S_{II,eff-R} = (da / dN)_{II,R} = \frac{C_1 \Delta K_R^{n_2}}{\Delta K_{fcl,R}^{n_2-n_1}} \quad \text{при} \quad \Delta K_{1-2,R} \leq \Delta K_R \leq \Delta K_{2-3,R}. \quad (5)$$

Зависимость эффективного размаха КИН ΔK_{eff} от номинального размаха КИН ΔK_R на втором участке КДУР при разных асимметриях цикла в пределах наличия закрытия трещины описывается выражением [32]

$$\Delta K_{eff} = n_1 \sqrt{\frac{\Delta K_R^{n_2}}{\Delta K_{fcl,R}^{n_2-n_1}}} \quad \text{при} \quad \Delta K_{1-2,R} \leq \Delta K_R \leq \Delta K_{fcl,R}. \quad (6)$$

Взаимосвязь между структурой материала, макро- и микроскоростью роста усталостной трещины на втором участке КДУР при разных асимметриях цикла нагружения с учетом влияния закрытия трещины. Структура поликристаллического материала характеризуется размером зерна. В зависимости от микроскорости РУТ в зерне размером l_z могут образовываться бороздки m_z , т.е. размер зерна определяется соотношением

$$l_z = S m_z. \quad (7)$$

Согласно уравнению (5), размер зерна связан с микро- и макроскоростью РУТ при разных асимметриях цикла в пределах наличия закрытия трещины зависимостью

$$l_z = m_z \frac{C_1 \Delta K_R^{n_2}}{\Delta K_{fcl,R}^{n_2-n_1}} \quad \text{при} \quad \Delta K_{1-2,R} \leq \Delta K_R \leq \Delta K_{2-3,R}. \quad (8)$$

Экспертиза разрушения конструкционных материалов по макро- и микроскорости РУТ. Предлагается следующая схема проведения экспертизы (на примере разных коэффициентов асимметрии цикла нагружения):

1) определение кинетики РУТ в материале при пульсирующем цикле ($R = 0$) нагружения по методике измерения текущего раскрытия вершины трещины [30]. Нахождение характеристик трещиностойкости ($\Delta K_{th,0R}$;

$\Delta K_{th,eff}$; $\Delta K_{eff,1-2}$; $\Delta K_{1-2,0R}$; $\Delta K_{2-3,0R}$; $\Delta K_{fc,0R}$; C_1 , n_1 , n_2 ; $\Delta K_{fcl,0R}$; $\Delta K_{fcl,th,R}$) по КДУР согласно работам [8, 9, 28–32]. Сведение характеристик трещиностойкости в таблицу;

2) микрофрактографический анализ рельефа поверхности разрушения элемента конструкции и изломов исследованных образцов по бороздкам усталости S . Сопоставление макро- и микроскорости РУТ. При условии совпадения скоростей РУТ на втором участке КДУР можно заключить, что разрушение элемента конструкции произошло при пульсирующем цикле ($R = 0$). Если скорости совпали до определенной ширины бороздки $S_{fcl,xR}$ при $\Delta K_{fcl,xR}$, необходимо определиться с асимметрией R_x цикла, при которой произошло разрушение элемента конструкции;

3) установление момента исчезновения закрытия трещины при асимметрии R_x . Согласно работе [32], на отдельном компактном образце, зная $\Delta K_{fcl,0R}$ и повышая ступенчато асимметрию цикла, находим $\Delta K_{fcl,R}$ для каждого коэффициента асимметрии цикла нагружения R . При сопоставлении характеристики $\Delta K_{fcl,R}$ с $\Delta K_{fcl,xR}$ определим истинное значение последней, а также асимметрию R_x , при которой произошло разрушение элемента конструкции;

4) определение кинетики РУТ в экспертном материале при асимметрии цикла нагружения R_x и запись ее в координатах $\lg da / dN - \lg \Delta K$;

5) микрофрактографический анализ излома отдельного компактного образца. Сопоставление микроскорости РУТ в таком образце после величины $\Delta K_{fcl,xR}$ с макроскоростью РУТ, определенной в соответствии с п. 4);

6) по ширине последней бороздки усталости S_{xR} при асимметрии R_x (размере зерна l_z) и по зависимостям (5), (8) находим размах КИН ΔK_x , при котором произошло разрушение элемента конструкции.

Заключение. Причиной кажущегося несоответствия между макро- и микроскоростью роста усталостной трещины на втором участке КДУР служит наличие явления смыкания–размыкания трещины, оцениваемое изменяющимся во времени амплитудным значением характеристики закрытия трещины ΔK_{cl}^{op} . Влияние закрытия трещины на кинетику РУТ (в пределах его наличия) выражается эффективным размахом КИН ΔK_{eff} , определяемым по методике измерения текущего раскрытия вершины трещины. Размах КИН ΔK_{eff} позволяет расширить область совпадения микро- и макроскорости РУТ как минимум до критического эффективного размаха КИН $\Delta K_{fcl,R}$.

Определена зависимость между структурой материала, микро- и макроскоростью РУТ на втором участке КДУР с учетом влияния асимметрии цикла нагружения и явления закрытия трещины.

Разработана методика экспертизы разрушения конструкционных материалов по микро- и макроскорости РУТ.

Резюме

На основі експериментальних даних показано, що розбіжність між макро- та мікрошвидкістю росту втомної тріщини на другій ділянці кінетичної діаграми втомного руйнування викликана явищем закриття тріщини в межах

його наявності. Встановлено залежності між макро- та мікрошвидкістю росту втовної тріщини, а також структурою матеріалу на другій ділянці за різних асиметрій циклу навантаження з урахуванням впливу закриття тріщини. Створена методика експертизи руйнування конструкційних матеріалів за мікро- та макрошвидкістю росту втовної тріщини.

1. *Meyn D. A.* Observations on micromechanisms of fatigue crack propagation in 2024 aluminium // *Trans. ASM, J. Basic Eng.* – 1968. – **61**, No. 1. – P. 42 – 51.
2. *Beachem C. D. and Pelloux R. M. N.* Electron fractography – a tool for the study of micromechanisms of fracturing processes // *ASTM STP 381.* – 1965. – P. 210 – 244.
3. *Broek D.* Some contributions of electron fractography to the theory of fracture // *Int. Met. Rev.* – 1974. – No. 19. – P. 135 – 182.
4. *Pelloux R. M.* Fractographic analysis of the influence of constituent particles of fatigue crack propagation in aluminum alloys // *Trans. ASME.* – 1964. – **57**, No. 2. – P. 511 – 519.
5. *Романив О. Н., Шур Е. А., Ткач А. Н.* Кинетика и механизм роста усталостной трещины в железе // *Физ.-хим. механика материалов.* – 1981. – № 2. – С. 57 – 66.
6. *Степаненко В. А., Красовский А. Я.* Микроструктурные особенности усталостного разрушения малоуглеродистой стали // *Пробл. прочности.* – 1974. – № 7. – С. 52 – 54.
7. *Красовский А. Я., Остап О. П., Степаненко В. А., Ярема С. Я.* Влияние низких температур на скорость и микрофрактургические особенности развития усталостной трещины низкоуглеродистой стали // *Там же.* – 1977. – № 4. – С. 74 – 79.
8. *Методы механических испытаний материалов. Определение характеристик трещиностойкости при циклическом нагружении. Методические указания.* Сер.: Проблемы прочности, долговечности и надежности продукции машиностроения. – М.: МНТК “Надежность машин”, 1993. – 56 с.
9. *Механика катастроф. Определение характеристик трещиностойкости конструкционных материалов: Методические рекомендации / Под ред. К. В. Фролова.* – М.: МИБ СТС, 1995. – 359 с.
10. *Kocanda S., Sadowski J.* Korelacyjne badania predkosci zmeczniewego pekania w elementach ze stali o podwyzszonej wytrzymalosci 12G2A // *Arch. Bud. Maszyn.* – 1977. – **24**, No. 2. – S. 239 – 263.
11. *Heiser F. A. and Hertzberg R. W.* Anisotropy of fatigue crack propagation // *Trans. ASME, J. Basic Eng.* – 1971. – **93**, No 6. – P. 211 – 217.
12. *Broek D.* The effect of intermetallic particles on fatigue crack propagation in aluminium alloys // *II Int. Congress Fract., Brighton.* – 1969, Session V. – 61 p.

13. *Taira S. and Tanaka K.* Microscopic study of fatigue crack propagation // Int. Conf., 1971, Society of Materials Science, Japan. – 1972. – Vol. 2. – P. 48 – 58.
14. *Moody N. R. and Herberich W. W.* Influence of frequency and microstructure on fatigue crack growth in Ti–6Al–6V–2Sn // J. Mater. Sci. – 1980. – **14**, No. 3. – P. 95 – 100.
15. *Романив О. Н., Зима Ю. В.* Количественная микрофрактография усталостного разрушения металлов и сплавов // Стандартизация фрактографического метода оценки скорости усталостного разрушения металлов. Вып. 5 / Под. ред. О. Н. Романива. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – С. 6 – 30.
16. *Ботвина Л. Р., Лымарь Л. В., Лозовский В. Н.* К вопросу об оценке длительности роста трещины по ширине усталостных бороздок // Стандартизация фрактографического метода оценки скорости усталостного разрушения металлов. Вып. 5 / Под ред. О. Н. Романива. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – С. 38 – 54.
17. *Ботвина Л. Р., Ярема С. Я., Гречко В. В., Лымарь Л. В.* Кинетика усталостного разрушения титанового сплава ВТ3-1 // Физ.-хим. механика материалов. – 1981. – № 6. – С. 39 – 45.
18. *Yokobori T. and Kiyoshi S.* The effect of frequency on fatigue crack propagation rate and striation spacing in 2024-T3 aluminum alloy and SM-50 steel // Eng. Fract. Mech. – 1976. – **8**, No. 1. – P. 81 – 88.
19. *Hertzberg R. W. and Euv E. F. J.* Crack closure end fatigue striations in 2024-T3 aluminum alloy // Met. Trans. – 1973. – **4**, No. 3. – P. 887 – 889.
20. *Екименков Л. Н.* Определение скорости развития усталостных трещин методом количественной фрактографии // Стандартизация фрактографического метода оценки скорости усталостного разрушения металлов. Вып. 5 / Под ред. О. Н. Романива. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – С. 67 – 73.
21. *Степаненко В. А.* Фрактография и кинетика усталости конструкционных материалов // Стандартизация фрактографического метода оценки скорости усталостного разрушения металлов. Вып. 5 / Под. ред. О. Н. Романива. – М.: Изд-во стандартов, 1984. – С. 73 – 85.
22. *MP-189-86.* Расчеты и испытания на прочность в машиностроении. Метод оценки сопротивления металлических материалов усталостному разрушению по шагу усталостных бороздок. – М.: ВНИИНмаш, 1986. – 36 с.
23. *Ботвина Л. Р.* Кинетика разрушения конструкционных материалов. – М.: Наука, 1989. – 231 с.
24. *Krasowsky A. J. and Tot L.* Material characterization for the reliability assessment of cyclically loaded engineering structures / Ed. R. A. Smith. – London: Kluwer Academic Publishers, NATO ASY Series High Technology, 1997. – **39**. – P. 165 – 223.

25. *Tanaka K., Masuda C., and Nishiyama S.* The generalised relationship between the parameters C and m of Paris law for fatigue crack growth // *Scr. Met.* – 1981. – **15**, No. 3. – P. 259 – 264.
26. *Miller G. A.* Fatigue fracture appearance and the kinetics of striation formation in some high-strength steels // *Trans. Quart., ASME.* – 1969. – **62**, No. 3. – P. 651 – 658.
27. *Ярема С. Я.* О корреляции параметров уравнения Пэриса и характеристик циклической трещиностойкости материалов // *Пробл. прочности.* – 1981. – № 9. – С. 20 – 28.
28. *Пиняк И. С.* Текущее значение раскрытия вершины трещины усталости как экспериментально обоснованный критерий ее роста // *Там же.* – 1998. – № 1. – С. 25 – 33.
29. *Пиняк И. С.* Влияние закрытия трещины на определяемые характеристики циклической трещиностойкости сталей // *Там же.* – № 2. – С. 161 – 171.
30. *Пиняк И. С.* Вплив явища закриття вістря втомної тріщини на асиметрію циклу навантаження та пороги тріщиностійкості // *Там же.* – 2000. – № 6. – С. 106 – 114.
31. *Пиняк И. С.* О достоверном уравнении второго участка кинетической диаграммы усталостного разрушения // *Там же.* – 1999. – № 3. – С. 83 – 87.
32. *Пиняк И. С.* Рівняння другої ділянки кінетичної діаграми втомного руйнування за різних додатніх асиметрій циклу навантаження // *Там же.* – 2000. – № 2. – С. 75 – 80.

Поступила 10. 11. 99

Localization of Resonant Spherical Waves

Sh. U. Galiev^a and O. P. Panova^b

^a Department of Mechanical Engineering, The University of Auckland, Auckland, New Zealand

^b Institute of Problems of Strength, National Academy of Sciences of Ukraine, Kiev, Ukraine

УДК 539.4

Локализация резонансных сферических волн

Ш. У. Галиев^a, О. П. Панова^b

^a Отделение машиностроения Оклендского университета, Окленд, Новая Зеландия

^b Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

Рассматриваются радиальные сферические резонансные волны, возбуждаемые в трансрезонансном режиме. Приближенное общее решение возмущенного волнового уравнения представляется в виде, учитывающем нелинейные, пространственные и диссипативные эффекты. Граничная задача сводится к возмущенному смешанному уравнению Бюргера–Кортвега–де Вриза, для которого построено несколько решений. Установлено, что в невязкой среде вблизи резонанса могут возникать ударные волны. Однако как вязкость, так и пространственная дисперсия вблизи резонанса предотвращают формирование ударного разрыва, в результате чего в резонаторе вместо ударных генерируются периодические локализованные волны.

One-side travelling nonlinear waves have been the subject of intense studies for the last decades [1–4]. In finite physical systems both left and right travelling waves may be excited. Near the resonant frequencies, the amplitudes of these waves increase. As a result, the balance between nonlinear, dissipative, and dispersive effects varies together with the excited frequency. Therefore, in the transresonant frequency band both shock and soliton-like waves may be excited in resonators. This dynamics was studied in [5–7] for the case of plane resonant waves in elongated resonators. Here we consider the spatial effect on the evolution of nonlinear waves in transresonant frequency bands. For simplicity, spherically symmetric pressure waves excited in a gas or liquid sphere are discussed. An oscillating monopole is located at the origin. Apparently, these types of *driven resonant-dissipative three-dimensional* systems were not considered earlier.

In accordance with [8], we write an equation of nonlinear acoustics for spherical waves taking into account only linear and quadratic terms, respectively, for the velocity potential φ :

$$a_0^2(\varphi_{rr} + 2r^{-1}\varphi_r) = \varphi_{tt} + (\gamma - 1)a_0^{-2}\varphi_t\varphi_{tt} + 2\varphi_r\varphi_{rt} - \delta a_0^{-2}\varphi_{ttt}, \quad (1)$$

where a_0 is the speed of sound in an undisturbed medium, γ is the polytropic exponent of gas (Eq. (1) is also valid for fluid [8]), δ is the so-called “sound diffusivity.” The subscripts t and r indicate the time and space derivatives, respectively. We emphasize that Eq. (1) does not take into account the third order effects and the dissipative term is of the second order [8, 9]. The solution of (1) can be presented as

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (2)$$

where φ_1 and φ_2 are the first- and the second-order values, respectively. Substituting Eq. (2) into (1) and equating the values of the same order, we obtain a system of differential equations for φ_1 and φ_2 :

$$\varphi_{1rr} + 2r^{-1}\varphi_{1r} = a_0^{-2}\varphi_{1tt}, \quad (3)$$

$$a_0^2(\varphi_{2rr} + 2r^{-1}\varphi_{2r}) = \varphi_{2tt} + 2\varphi_{1r}\varphi_{1rt} + (\gamma - 1)a_0^{-2}\varphi_{1t}\varphi_{1tt} - \delta a_0^{-2}\varphi_{1ttt}. \quad (4)$$

The solution of (3) is the sum of diverging and converging waves:

$$\varphi_1 = r^{-1}(f_1 + f_2). \quad (5)$$

Here and hereinafter, $f_1 = f_1(\xi)$ and $f_2 = f_2(\eta)$, where $\xi = a_0t - r$ and $\eta = a_0t + r$. With allowance for (5), we rewrite Eq. (4) in the form

$$\begin{aligned} a_0^2(\varphi_{2rr} + 2r^{-1}\varphi_{2r}) - \varphi_{2tt} = & 2a_0r^{-2}(f_2' - f_1')(f_2'' - f_1'') - \\ -2a_0r^{-3}[(f_2 + f_1)(f_2'' - f_1'') - (f_1')^2 + (f_2')^2] + & 2a_0r^{-4}(f_2 + f_1)(f_2' + f_1') + \\ + (\gamma - 1)a_0r^{-2}(f_2' + f_1')(f_2'' + f_1'') - & \delta a_0r^{-1}(f_2''' + f_1'''), \end{aligned} \quad (6)$$

where the primes denote a derivative with respect to the argument. The solution to (6) is

$$\begin{aligned} \varphi_2 = & r^{-1}(\psi_1 + \psi_2) + 0.5a_0^{-1}r^{-2}[(f_1 + f_2)^2] - \\ -0.25(\gamma + 1)a_0^{-1}r^{-1} \int \int & r^{-1}(f_1' + f_2')(f_1'' + f_2'')d\xi d\eta + \\ + 0.25\delta a_0^{-1}r^{-1} & (\eta f_1'' + \xi f_2''). \end{aligned} \quad (7)$$

Here and above, the functions $f_1, f_2, \psi_1 = \psi_1(\xi)$, and $\psi_2 = \psi_2(\eta)$ are unknown and must be found from the initial and boundary conditions of the corresponding problem [9]. However, it is complicated to solve boundary problems using (2) due to the integral in (7). To simplify solution (7), let us replace the multiplier $1/r$ under the integral by $1/R_i$. As a result, near the boundary surfaces $r = R_i$ ($i = 1, 2$) and

$$\begin{aligned} \varphi = & r^{-1}(f_1 + f_2 + \psi_1 + \psi_2) + 0.5 a_0^{-1} r^{-2} [(f_1 + f_2)^2] - \\ & - 0.25(\gamma + 1) a_0^{-1} r^{-1} R_i^{-1} [0.5 \eta (f_1') + 0.5 \xi (f_2')^2 + f_1' f_2 + f_2' f_1] + \\ & + 0.25 \delta a_0^{-1} r^{-1} (\eta f_1'' + \xi f_2''). \end{aligned} \quad (8)$$

Solution (8) satisfies Eq. (1) if the expression $0.5 a_0 r^{-2} (\gamma + 1) [(f_1' + f_2')^2] \times \times (1 - r R_i^{-1})$ is a value of the third order. Thus Eq. (8) is valid near the surface $r = R_i$, where $|1 - r R_i^{-1}| \ll 1$.

In this paper, we examine only periodical oscillations. In this case, the velocity and the pressure perturbation

$$P - P_0 = -\rho_0 (\varphi_t + 0.5 \varphi_r^2 - 0.5 a_0^{-2} \varphi_t^2) + (\lambda + 2\nu) a_0^{-2} \varphi_{tt} \quad (9)$$

must not contain secular terms (formula (9) defines the pressure if λ and ν are the shear and dilatational viscosities [8]). The secular terms will be eliminated if we assume in (8) that

$$\psi_1 = \Psi_1 + 0.125 a_0^{-1} R_i^{-1} (\gamma + 1) [\xi (f_1')^2 - 2 f_1 f_1'] - 0.25 \delta a_0^{-1} \xi f_1'' - c \xi^2,$$

$$\psi_2 = \Psi_2 + 0.125 a_0^{-1} R_i^{-1} (\gamma + 1) [\eta (f_2')^2 - 2 f_2 f_2'] - 0.25 \delta a_0^{-1} \eta f_2'' + c \eta^2,$$

where c is an arbitrary constant, $f_1, f_2, \Psi_1 = \Psi_1(\xi)$, and $\Psi_2 = \Psi_2(\eta)$ are periodic functions. As a result, near the surface $r = R_i$, the velocity potential for steady-state oscillations is given by the expression

$$\begin{aligned} \varphi = & r^{-1}(f_1 + f_2 + \Psi_1 + \Psi_2 + 4ca_0rt) + \\ & + 0.5 a_0^{-1} r^{-2} [1 - 0.25 r R_i^{-1} (\gamma + 1)] [(f_1 + f_2)^2] - \\ & - 0.25(\gamma + 1) a_0^{-1} R_i^{-1} [(f_1')^2 - (f_2')^2] + 0.5 \delta a_0^{-1} (f_1'' - f_2''). \end{aligned} \quad (10)$$

This expression will be used below to solve a boundary problem. We consider the waves excited by a simple-harmonic source of pressure, which has radius R_1 and is placed in the center of a sphere. It is assumed that the pressure source region is very small relative to the excited wavelength. The other boundary of the sphere is free. Therefore, we have

$$P - P_0 = -B \cos \omega t \quad (r = R_1), \quad (11)$$

$$P - P_0 = 0 \quad (r = R_2). \quad (12)$$

First, resonant frequencies are determined. Then, resonant oscillations are analyzed on the basis of nonlinear relations. Using (9) and (10), we can rewrite condition (11) as

$$\begin{aligned}
 & a_0 R_1 (f'_1 + f'_2 + \Psi'_1 + \Psi'_2 + 4cR_1) + [1 - 0.25(\gamma + 1)] [(f'_1 + f'_2)^2 + \\
 & + (f_1 + f_2)(f''_1 + f''_2)] - 0.5 R_1 (\gamma + 1) (f'_1 f''_1 - f'_2 f''_2) + 0.5 \delta R_1^2 (f'''_1 - f'''_2) + \\
 & + 0.5 [R_1^{-1} (f_1 + f_2) + f'_1 - f'_2]^2 - 0.5 (f'_1 + f'_2)^2 - \\
 & - 0.5 (f''_1 + f''_2)^2 - \rho_0^{-1} R_1 (\lambda + 2\nu) (f''_1 + f''_2) = \rho_0^{-1} B R_1^2 \cos \omega t, \quad (13)
 \end{aligned}$$

where $f_1 = f_1(a_0 t - R_1)$, $f_2 = f_2(a_0 t + R_1)$, $\Psi_1 = \Psi_1(a_0 t - R_1)$, and $\Psi_2 = \Psi_2(a_0 t + R_1)$.

Condition (12) may be presented as (13) if in (13) we substitute R_2 for R_1 and assume $B = 0$. Then from (12) we can find

$$\begin{aligned}
 f_1(a_0 t - r) &= f(a_0 t - r + R_2), \quad f_2(a_0 t + r) = -f(a_0 t + r - R_2), \\
 \Psi'_1 &= -a_0^{-1} R_2^{-1} (f'_1)^2 = 0.5 \delta a_0^{-1} R_2 f''_1 - 2cR_2, \quad \Psi'_2 = \Psi'_1. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Let us consider Eq. (13) taking into account (14). As the first approximation, it follows from (13) that

$$f'(a_0 t - R_1 + R_2) - f'(a_0 t + R_1 - R_2) = B R_1 a_0^{-1} \rho_0^{-1} \cos \omega t$$

and

$$\begin{aligned}
 & f'(a_0 t - r + R_2) = \\
 & = 0.5 B R_1 a_0^{-1} \rho_0^{-1} \sin \omega a_0^{-1} (a_0 t - r + R_2) / \sin \omega a_0^{-1} (R_2 - R_1). \quad (15)
 \end{aligned}$$

From (15) we obtain resonant frequencies: $\Omega_N = \pi N a_0 (R_2 - R_1)^{-1}$ ($N = 1, 2, 3, \dots$). The linear solution (15) is not valid near the frequencies $\omega = \Omega_N + \omega_1$, where ω_1 is a small value. We assume that $\omega_1 = a_0 (R_2 - R_1)^{-1} \times \sin \omega a_0^{-1} (R_2 - R_1)$.

Let us consider resonant frequencies. First, the function $f'(a_0 t + R_1 - R_2)$ is expanded in Taylor's series at $r = R_1$:

$$f'(a_0 t + R_1 - R_2) = f' - 2\omega^{-1} \omega_1 (R_2 - R_1) f'' + 2\omega^{-2} \omega_1^2 (R_2 - R_1)^2 f''' - \dots \quad (16)$$

It was suggested that

$$f'(a_0 t - R_1 + R_2 - 2N\pi a_0 / \omega) = f'(a_0 t - R_1 + R_2) = f'.$$

Then using expansions (16) and (13), we obtain the following basic equation:

$$\begin{aligned}
 & a_0 R_1 R_2 \omega^{-1} \omega_1 f'' - R_1 R_2 [a_0 \omega^{-2} \omega_1^2 (R_2 - R_1) + 0.5 \delta] f''' + (f')^2 = \\
 & = \rho_0^{-1} B R_2 R_1^2 (R_2 - R_1)^{-1} (\cos^2 1/2\omega t - 0.5) + 2a_0 R_1 R_2 c. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Equation (17) is the perturbed compound Burgers–Korteweg–de Vries equation written for a travelling wave. This equation has a nonlinear term that tends to produce “discontinuity” in this wave. The term f' dissipates through the viscous-like effect. This term disappears at resonance. The second term, which is generated due to the viscosity of the medium, disperses the wave. Due to this term, solitary waves may be excited. We write the solution of (17) for the case $c = 0.25 a_0^{-1} \rho_0^{-1} B R_1 (R_2 - R_1)^{-1}$ as $f' = \sqrt{\varepsilon} \Phi(\tau) \cos \tau$. Here $\Phi(\tau)$ is an unknown function and $\varepsilon = B \rho_0^{-1} R_2 R_1^2 (R_2 - R_1)^{-1}$, and $\tau = \omega t / 2$. As a result, Eq. (17) becomes

$$\begin{aligned}
 & 0.5 \omega_1 R_1 R_2 (\Phi' - \Phi \tan \tau) - 0.25 a_0^{-1} \omega_1^2 R_1 R_2 (R_2 - R_1 + 0.5 \delta \omega^2 a_0^{-1} \omega_1^{-2}) \times \\
 & \times (\Phi'' - 2\Phi' \tan \tau - \Phi) = \sqrt{\varepsilon} (1 - \Phi^2) \cos \tau. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Here $\Phi' = d\Phi/d\tau$.

Transresonant process. Far from the resonance, when the first term in (17) is dominant, the acoustic solution (15) follows from (17). Near resonance, this term reduces together with ω_1 . At the same time, the influence of the nonlinear and second terms in (17) increases. To simplify the problem, let us assume that the nonlinear term begins to distort the acoustic solution, while the dispersive effect is still small. In this case, we seek an approximate solution of (18) as the sum $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, where $\Phi_0 \gg \Phi_1$. The quantity Φ_0 takes into account the nonlinear and first terms in (18), while Φ_1 corrects Φ_0 . We seek a solution, which is valid near the points where $|\sin \tau| \ll 1$. By equating the terms of the same order in (18), we obtain two differential equations:

$$\Phi'_0 = 2\sqrt{q} (1 - \Phi_0^2) \cos \tau, \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 & \Phi'_1 - \Phi_0 \tan \tau - \frac{1}{2} \omega_1 a_0^{-1} (R_2 - R_1 + \frac{1}{2} \delta \omega^2 a_0^{-1} \omega_1^{-2}) (\Phi''_0 - \Phi_0) = \\
 & = -4\sqrt{q} \Phi_0 \Phi_1 \cos \tau, \quad (20)
 \end{aligned}$$

where $\sqrt{q} = \sqrt{\varepsilon} (\omega_1 R_1 R_2)^{-1}$. Equation (19) is locally satisfied if $\Phi_0 = \tanh(2\sqrt{q} \sin \tau)$ [8]. The approximate solution of (20) is

$$\Phi_1 = q_1 \sec h^2(2\sqrt{q} \sin \tau) \cos \tau,$$

where

$$q_1 = 8\omega_1 a_0^{-1} q^{1.5} (R_2 - R_1 + \frac{1}{2} \delta \omega^2 a_0^{-1} \omega_1^{-2}).$$

For the travelling waves

$$\begin{aligned} f'[a_0 t \pm (R_2 - r)] &= \\ &= \sqrt{\varepsilon} [\tanh(2\sqrt{q} \sin p) \cos p + q_1 \sec h^2(2\sqrt{q} \sin p) \cos^2 p], \end{aligned} \quad (21)$$

where $p = \omega t / 2 \pm [\omega a_0^{-1} (R_2 - r) - \pi N] / 2$. This solution indicates that the finite-amplitude travelling waves become steeper when the excitation frequency approaches the resonant frequency. According to (21), shock waves may be excited near resonance in an inviscid medium. For the latter case, if $\omega_1 = 0$, we have the solution with discontinuities [7]. However, both the viscosity and spatial dispersion begin to be important near resonance and can prevent the formation of a shock wave [5–13]. It follows from (21) that a soliton-like wave can generate near resonance. The amplitude of the soliton-like wave increases when $\omega_1 \rightarrow 0$ because Eq. (20) and solution (21) are not valid very close to resonance.

Near resonance, the influence of the first term in (18) decreases. Accordingly, the influence of the second term increases. At resonance, Eq. (18) transforms to the Korteweg–de Vries type equation

$$\Phi'' - 2\Phi' \tan \tau - \Phi = q_0^{-1} (1 - \Phi^2) \cos \tau, \quad (22)$$

where $q_0 = -\frac{1}{8} \delta \omega^2 \varepsilon^{-0.5} a_0^{-2} R_1 R_2$. Let $\Phi = [A \sec h^2(\gamma \sin M^{-1} \tau) + C] \cos \tau$, where A, γ , and C are constant values. We have written the solution localized near the points where $|\sin M^{-1} \tau| \ll 1$ ($M = 1, 2, 3 \dots$). This solution satisfies approximately Eq. (22) if $A = 6q_0 \gamma^2 M^{-2}$, $\gamma^2 = 0.5 M^2 (1 - q_0^{-1} C)$, and $C_{\pm} = 4(q_0 \pm \sqrt{q_0^2 + 3/4})/3$. If $|q_0| \ll 1$, then $C_{\pm} \approx 1$, $\gamma^2 \approx -0.5 q_0^{-1} M^2$, and $A \approx -3$. For the latter case,

$$f' = \sqrt{\varepsilon} \{1 - 3 \sec h^2 [M(\sin M^{-1} \tau - R) / \sqrt{-2q_0}]\} \cos^2 \tau.$$

For the travelling waves,

$$f'[a_0 t \pm (R_2 - r)] = \sqrt{\varepsilon} \{1 - 3 \sec h^2 [M(\sin M^{-1} p) / \sqrt{-2q_0}]\} \cos^2 p. \quad (23)$$

If $M = 1$, expression (23) defines oscillations at $r - R_1$ at the frequency ωt . Solution (23) also describes subharmonic oscillations if $M = 2, 3 \dots$. Since this solution must satisfy expansion (16), subharmonic waves corresponding to $M > 1$ may be excited only near the frequencies $\omega = M \Omega_N$. For example, the case

$M = 2$ may be realized only for even resonance. Thus, solution (23) defines the spectrum ($M = 2, 3 \dots$) of subharmonic localized waves.

The case $M = 1$ corresponds to solution (22). For this case, near resonance we assume $\Phi = \Phi_0 + \Phi_1$, where $\Phi_0 \gg \Phi_1$. The quantity Φ_0 takes into account the nonlinear and the second terms in (18), while Φ_1 corrects Φ_0 . Then for travelling waves one can find

$$f'(a_0 t \pm r) = \sqrt{\varepsilon} \{ [3 \sec^2 h^2 (\sin p / \sqrt{2q_0}) - 1] \cos p + Q \tanh(\sin p / \sqrt{2q_0}) \} \cos p. \quad (24)$$

Here

$$Q = 3\omega_1(2q_0)^{-0.5} \{ 4R_1 R_2 \varepsilon^{0.5} + 0.25 \delta \omega^2 a_0^{-2} q_0^{-1} [0.5 \delta + a_0 \omega^{-2} \omega_1^2 (R_2 - R_1)] \}.$$

Solution (24) is localized near the lines where $\sin p \ll 1$. Thus, according to (23) and (24), periodic spherical solitons may be excited in viscous media at the exact resonance. These waves contrast with the periodic spherical shock waves, which are predicted by (21) for inviscid media.

Linear (15) and nonlinear (21) and (24) solutions describe some scenarios of transresonant evolution of the waves in weakly dissipative media. Far from resonance, we have harmonic waves. These waves are distorted due to the nonlinear effect when the value of ω_1 decreases. If $\delta \approx 0$, these waves transform into the shock-like waves. However, $\delta \neq 0$ and discontinuities do not form in the system. Very close to resonance $\omega_1 \approx 0$ and spatial dispersion (the second term in (17)) begins to distort the waves. As a result, the waves may be generated which have some features of both shock and soliton-like waves. However, at the exact resonance, the first term in (17) equals zero and soliton-like waves are generated. These waves may be much localized if $\delta \approx 0$.

Now we can find pressure and velocity in the medium. However, we emphasize again that expression (10) does not take into account correctly the second-order values far from the boundaries. Therefore, we must only consider the first-order terms in expressions for velocity and pressure. For example, instead of (9) we have

$$P - P_0 = r^{-1} \rho_0 a_0 [f'(\eta - R_1) - f'(\xi + R_1)].$$

Thus, according to the above analysis, strongly localized waves travel inside the sphere (spherical layer). Pictures of the variation of dimensionless pressure $(P - P_0) / \rho_0 a_0 \varepsilon^{0.5}$ are presented in Figs. 1, 2, and 3. There the dimensionless time τ and radius (r/R_2) are used. We calculated pressure using (21) (Fig. 1) and (23) (Figs. 2 and 3), and assuming $R_1 = 0.01R_2$. There is strong amplification of the waves near $r = R_1$.

In contrast to plane resonant shock waves [7, 14], resonant spherical nonlinear waves practically have not been studied [9, 13]. At the same time, the spherical model for the simulation of different physical objects is very popular. Indeed, on the one hand, the model of a pulsating sphere is widely used in astrophysics [15, 16]. On the other hand, this model is used for studying

sonoluminescence in liquids when the period of oscillation and the space distances are very small [17]. The competition of nonlinear, dissipative, and dispersive effects may be important for these systems. We considered this competition in the transresonant regime. The distortion of harmonic waves into shock-like and then soliton-like waves was shown. Our considerations have been strictly limited to the aspect of nonlinear acoustics; however, the results presented may be interesting for various media and circumstances.

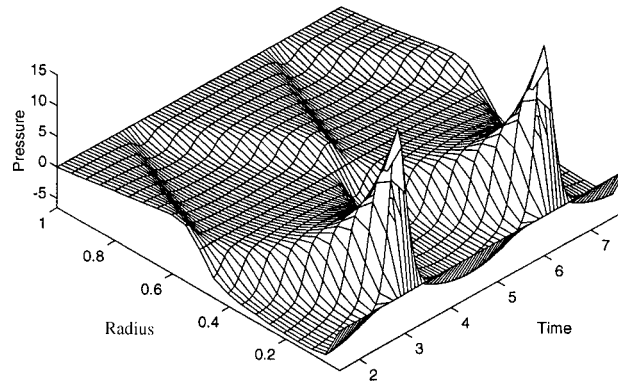


Fig. 1. Forced pressure waves inside the sphere ($q = 10$, $q_1 = 0.1$, and $N = 2$).

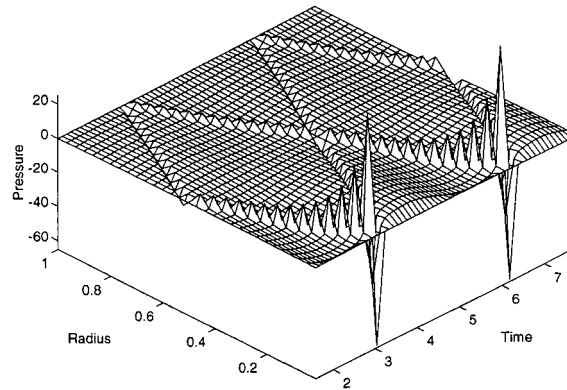


Fig. 2. Forced pressure waves inside the sphere ($q_0 = 0.001$, $N = 2$, and $M = 1$).

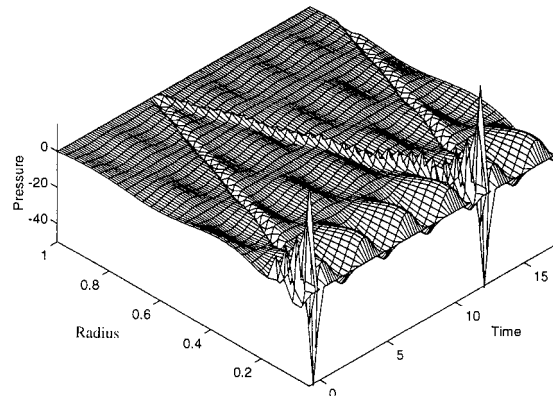


Fig. 3. Forced pressure waves inside the sphere ($q_0 = 0.01$, $N = 4$, and $M = 4$).

Резюме

Розглядаються радіальні сферичні резонансні хвилі, що збуджуються в трансрезонансному режимі. Наближений загальний розв'язок збуреного хвильового рівняння записується з урахуванням нелінійних, просторових і дисипативних ефектів. Гранична задача зводиться до збуреного змішаного рівняння Бюргера–Кортевега–де Вріза, для якого побудовано декілька розв'язків. Установлено, що в нев'язкому середовищі поблизу резонансу можуть виникати ударні хвилі. Однак як в'язкість, так і просторова дисперсія поблизу резонансу запобігають формуванню ударного розриву, в результаті чого в резонаторі замість ударних генеруються періодичні локалізовані хвилі.

1. T. I. Belova and A. E. Kudryavtsev, "Solitons and their interactions in classical field theory," *Physics-Uspeski*, **40**, 359–386 (1997).
2. M. Mitchell and M. Segev, "Self-trapping of incoherent white light," *Nature*, **387**, 880–883 (1997).
3. G. Huang, M. G. Velarde, and V. N. Kurdyumov, "Cylindrical solitary waves and their interaction in Bnard–Marangoni layers," *Phys. Rev.*, **E57**, 5473–5482 (1998).
4. Y. S. Kivshar and B. Luther-Davies, "Dark optical solitons: Physics and applications," *Phys. Reports*, **298**, 81–197 (1998).
5. Sh. U. Galiev, "Topographic effect in a Faraday experiment," *J. Phys. A: Math. Gen.*, **32**, 6963–7000 (1999).
6. Sh. U. Galiev, "Unfamiliar vertically excited surface water waves," *Phys. Lett. A*, **266**, 41–52 (2000).
7. Sh. U. Galiev and T. Sh. Galiev, "Resonant travelling surface waves," *Ibid.*, **246**, 299–305 (1998).
8. L. H. Söderholm, "A higher order acoustic equation for the slightly viscous case," *Acustica*, **87**, 29–33 (2001).
9. Sh. U. Galiev, "Nonlinear one-dimensional oscillations of viscous gas in spherical and cylindrical layers," in: Proc. Seminar on Shell Theory, Kazan Physico-Tech. Inst., Kazan, (1971), pp. 240–253.
10. Sh. U. Galiev and O. P. Panova, "Periodic shock waves in spherical resonators (survey)," *Strength Mater.*, **27**, 602–620 (1995).
11. Sh. U. Galiev, "Passing through resonance of spherical waves," *Phys. Lett. A*, **260**, 225–233 (1999).
12. Sh. U. Galiev and T. Sh. Galiev, "Nonlinear transresonant waves, vortices, and patterns: From microresonators to the early universe," *Chaos. an Interdisciplinary J. of Nonlinear Science*, **11**, No. 3, 286–704 (2001).
13. W. Chester, "Resonant oscillations in closed tube," *J. Fluid Mech.*, **18**, 44–64 (1964).
14. M. A. Ilgamov, R. G. Zaripov, R. G. Galiullin, and V. B. Repin, "Nonlinear oscillations of a gas in a tube," *Appl. Mech. Rev.*, **49**, 137–154 (1996).

15. T. M. Brown and R. L. Gilliland, "Astroseismology," *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, **32**, 37–82 (1994).
16. A. Gautschy and H. Saito, "Stellar pulsations across the HR diagram: Pt. 1," *Ibid.*, **33**, 75–113 (1995).
17. C. C. Wu and P. H. Roberts, "A model of sonoluminescence," *Proc. Royal Soc. London*, **A445**, 323–349 (1994).

Received 20. 04. 2001

К определению напряженного состояния кольцевой ортотропной пластинки

М. Н. Гофман^а, А. С. Космодамианский^б

^а Приазовский государственный технический университет, Мариуполь, Украина

^б Донецкий государственный университет, Донецк, Украина

Предлагается метод решения плоской задачи для тонких ортотропных пластинок с использованием метода разложения по параметру. Нулевым приближением служит решение соответствующей изотропной задачи. Для конкретных материалов показано хорошее совпадение результатов, полученных предложенным методом, с известным решением для бесконечной пластинки с отверстием. Исследовано напряженное состояние кольцевой ортотропной пластинки, приведены зависимости распределения напряжений и дано сравнение с аналогичной изотропной пластинкой.

Ключевые слова: ортотропная пластинка, прямолинейная ортотропия, комплексные переменные, разложение по параметру.

Ранее [1] предложен новый подход к решению плоской задачи для тонких пластинок, изготовленных из материалов, обладающих ортотропными свойствами. В данной работе рассмотрено применение этого метода к исследованию напряженного состояния кольцевой пластинки из прямолинейно ортотропного материала. Аналогичная задача для бесконечной пластинки с использованием обобщенных комплексных переменных решена в [2].

Рассмотрим кольцевую пластинку, ограниченную контурами радиусов R_0 и R_1 , которая изготовлена из анизотропного материала, причем оси срединной плоскости x и y направлены перпендикулярно плоскостям упругой симметрии. По внешнему и внутреннему контурам пластинки приложена уравновешенная произвольная нагрузка.

В работе [2] вводится удовлетворяющая дифференциальному уравнению 4-го порядка функция напряжений, представленная через две функции обобщенных комплексных переменных. В соответствии с предложенным ранее методом [1], введем две функции комбинаций напряжений:

$$\Theta = \sigma_x + \sigma_y; \quad \Omega = \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}. \quad (1)$$

Тогда уравнения равновесия пластинки в комплексных переменных запишем следующим образом:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2)$$

В уравнении совместности перейдем к напряжениям, используя закон Гука, и представим его в виде

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial \bar{z}} + \alpha_1 \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3)$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z \partial \bar{z}} + \lambda \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right) (\Omega + \bar{\Omega}) - 2 \left(\frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \bar{z}^2} \right) \right] + \\ + \varepsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) (\Omega - \bar{\Omega}) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{E_2}{E_1} - 1 \right); \quad \alpha_2 = \frac{1 + \nu_2}{2} - \frac{E_2}{4G}; \quad \lambda = \frac{\alpha_1}{4(\alpha_1 + 1)}; \\ \varepsilon = \frac{\alpha_2}{4(\alpha_1 + 1)}; \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $E_1, E_2, G, \nu_1, \nu_2$ – технические постоянные материала.

В случае первой основной задачи условия на границах пластинки через комбинации напряжений представим в виде

$$i \int_0^s (X_n + iY_n) ds = \frac{1}{2} \int_0^s \Theta dz + \frac{1}{2} \int_0^s \bar{\Omega} d\bar{z}. \quad (6)$$

Для большинства ортотропных материалов эти коэффициенты являются малыми параметрами (таблица), а для изотропных пластинок обращаются в нуль. Поэтому для решения задачи применим метод малого параметра [3, 4] и запишем искомые функции в виде рядов по большему из параметров.

Пусть из параметров большим является ε . Тогда

$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Theta_n; \quad \Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Omega_n. \quad (7)$$

Подставим разложения (7) в выражения (2), (4) и (6) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε , полагая, что $\lambda = k\varepsilon$, где $k > 1$. В результате в нулевом приближении (изотропная пластинка) получим

$$\frac{\partial^2 \Theta_0}{\partial z \partial \bar{z}} = 0; \quad \frac{\partial \Omega_0}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial z}; \quad i \int_0^s (X_n + iY_n) ds = \frac{1}{2} \int_0^s \Theta_0 dz + \frac{1}{2} \int_0^s \bar{\Omega}_0 d\bar{z}, \quad (8)$$

в $(n + 1)$ -м приближении –

$$\frac{\partial^2 \Theta_{n+1}}{\partial z \partial \bar{z}} = 2k \left(\frac{\partial^2 \Theta_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Theta_n}{\partial \bar{z}^2} \right) + k \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) (\Omega_n + \bar{\Omega}_n) -$$

$$- \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} \right) (\Omega_n - \bar{\Omega}_n); \quad \frac{\partial \Omega_{n+1}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \Theta_{n+1}}{\partial z}; \quad \int_0^s \Theta_{n+1} dz + \int_0^s \bar{\Omega}_{n+1} d\bar{z} = 0. \quad (9)$$

Для нулевого приближения запишем

$$\Theta_0 = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)}; \quad \Omega_0 = \bar{z}\Phi'(z) + \psi(z), \quad (10)$$

где $\Phi(z) = \varphi'(z)$ и $\psi(z) = \psi'(z)$ – аналитические функции в срединной плоскости пластинки, которые можно определить известными методами [3] из граничных условий.

Сравнение результатов, полученных предложенным методом, с известным решением для пластинки из различных материалов

Материал	σ_θ / p по [2]	Первое прибли- жение	Расхож- дение, %	Второе прибли- жение	Расхож- дение, %
КАСТ-В ($E_1 = 1,97 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 1,36 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,704 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0,174$, $\varepsilon = 0,021$, $\gamma = -0,021$)	1,001	1,001	0	1,001	0
Полуватман ($E_1 = 0,301 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0,226 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,0996 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0,306$, $\varepsilon = 0,013$, $\gamma = -0,017$)	1,018	1,016	0,2	1,018	0,02
СТЭР-С-30 ($E_1 = 3,49 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 2,55 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,80 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0,13$, $\varepsilon = -0,067$, $\gamma = -0,018$)	1,368	1,340	2,1	1,360	0,6
ПН-3 ($E_1 = 1,76 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 1,28 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,27 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0,15$, $\varepsilon = -0,169$, $\gamma = -0,018$)	1,754	1,750	0,2	1,720	1,95
СВАМ 1:1 ($E_1 = 2,55 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 2,55 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,44 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0,13$, $\varepsilon = -0,221$, $\gamma = 0$)	1,745	1,884	8,0	1,689	3,2
СВАМ 15:1 ($E_1 = 4,51 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 1,57 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,55 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0,27$, $\varepsilon = -0,05$, $\gamma = -0,049$)	1,629	1,394	14,4	1,509	7,4
СПКН ($E_1 = 0,375 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0,1 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,04 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0,0747$, $\varepsilon = -0,027$, $\gamma = -0,056$)	1,625	1,332	18,1	1,454	10,6
СВАМ-ИММ ($E_1 = 3,4 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 0,886 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,295 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0,3$, $\varepsilon = -0,065$, $\gamma = -0,057$)	1,89	1,487	21,5	1,648	13,0

В качестве примера рассмотрим осесимметричное нагружение пластинки. В нулевом приближении имеем известную задачу, для которой комплексные потенциалы таковы:

$$\varphi_0(z) = a_0 z; \quad \psi_0(z) = b_0 z^{-1}, \quad (11)$$

где a_0 и b_0 – коэффициенты, определяемые из граничных условий. Тогда

$$\Theta_0 = 2a_0; \quad \Omega_0 = -b_0 z^{-2}. \quad (12)$$

В первом приближении найдем правую часть первого уравнения (9) и, интегрируя, получаем

$$\Theta_1 = -2b_0(1+k)(z^{-3}\bar{z} + \bar{z}^{-3}z) + \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)}. \quad (13)$$

Из второго уравнения (9) определим

$$\Omega_1 = b_0(1+k)(3z^{-4}\bar{z}^2 + \bar{z}^{-2}) + \Phi_1'(z)\bar{z} + \psi_1(z). \quad (14)$$

Удовлетворяя третьему равенству (9), получаем

$$\varphi_1(t) + \overline{t\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = \frac{b_0(1+k)}{R_j}(\sigma^5 - \sigma^{-3}), \quad (15)$$

где t – аффикс точек контура; σ – аффикс точек единичной окружности; R_j – радиус соответствующего контура.

Примем комплексные потенциалы в виде

$$\varphi_1(z) = a_5^{(1)} z^5 + a_3^{(1)} z^{-3}; \quad \psi_1(z) = b_3^{(1)} z^3 + \beta_5^{(1)} z^{-5}. \quad (16)$$

Подставив выражения (16) в равенство (15), получим уравнения для определения неизвестных коэффициентов комплексных потенциалов:

$$\begin{aligned} a_5^{(1)} R_j^5 - 3\alpha_3^{(1)} R_j^{-3} + \beta_5^{(1)} R_j^{-5} &= \frac{b_0(1+k)}{R_j}; \\ \alpha_3^{(1)} R_j^{-3} + 5a_5^{(1)} R_j^5 + b_3^{(1)} R_j^3 &= -\frac{b_0(1+k)}{R_j}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда выражения для комбинаций напряжений в первом приближении окончательно примут вид

$$\Theta_1 = 5a_5^{(1)}(z^4 + \bar{z}^4) - 2b_0(1+k)\left(\frac{\bar{z}}{z^3} + \frac{z}{\bar{z}^3}\right) - 3\alpha_3^{(1)}\left(\frac{1}{z^4} + \frac{1}{\bar{z}^4}\right); \quad (18)$$

$$\Omega_1 = b_0(1+k) \left(\frac{3\bar{z}^2}{z^4} + \frac{1}{\bar{z}^2} \right) + 20a_5^{(1)} z^3 \bar{z} + 12\alpha_3^{(1)} \frac{\bar{z}}{z^5} + 3b_3^{(1)} z^2 - 5 \frac{\beta_5^{(1)}}{z^6}. \quad (19)$$

Найдем второе приближение задачи. Поступая аналогично, получаем

$$\begin{aligned} \Theta_2 = & 4b_0(1+k) \left[3k \left(\frac{\bar{z}^2}{z^4} + \frac{z^2}{\bar{z}^4} \right) + (1+k) \left(\frac{\bar{z}^3}{z^5} + \frac{z^3}{\bar{z}^5} \right) - (1-k) \left(\frac{\bar{z}}{z^3} + \frac{z}{\bar{z}^3} \right) \right] + \\ & + 20a_5^{(1)} [4k(z^3 \bar{z} + z\bar{z}^3) - 3(1+k)(z\bar{z})^2] + \\ & + 6\alpha_3^{(1)} \left[8k \left(\frac{\bar{z}}{z^5} + \frac{z}{\bar{z}^5} \right) + 5(1+k) \left(\frac{\bar{z}^2}{z^6} + \frac{z^2}{\bar{z}^6} \right) \right] - \\ & - 12(1+k)b_3^{(1)} z\bar{z} - 30\beta_5^{(1)}(1+k) \left(\frac{\bar{z}}{z^7} + \frac{z}{\bar{z}^7} \right) + \Phi_2(z) + \overline{\Phi_2(z)}; \quad (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 = & b_0(1+k) \left[2(1-k) \left(\frac{3\bar{z}^2}{z^4} + \frac{1}{\bar{z}^2} \right) - 8k \left(\frac{2\bar{z}^3}{z^5} + \frac{z}{\bar{z}^3} \right) - (1+k) \left(\frac{5\bar{z}^4}{z^6} + \frac{3z^2}{\bar{z}^4} \right) \right] + \\ & + 20a_5^{(1)} [k(6\frac{z^2}{\bar{z}} \bar{z}^2 + \bar{z}^4) - 2(1+k)z\bar{z}^3] - \\ & - 12\alpha_3^{(1)} \left[k \left(\frac{10\bar{z}^2}{z^6} + \frac{1}{\bar{z}^4} \right) + (1+k) \left(\frac{5\bar{z}^3}{z^7} + \frac{z}{\bar{z}^5} \right) \right] - \\ & - 6(1+k)b_3^{(1)} \bar{z}^2 + 5\beta_5^{(1)}(1+k) \left(\frac{21\bar{z}^2}{z^8} + \frac{1}{\bar{z}^6} \right) + \Phi_2'(z)\bar{z} + \psi_2(z). \quad (21) \end{aligned}$$

Удовлетворяя граничным условиям, для определения комплексных потенциалов во втором приближении получаем равенство

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) + \overline{t\varphi_2'(t)} + \overline{\psi_2(t)} = & \frac{b_0(1+k)}{R} \{2(1-k)(\sigma^5 - \sigma^{-3}) - 4k(\sigma^7 - \sigma^{-5}) - \\ & - (1+k)(\sigma^9 - \sigma^{-7})\} - 20a_1 R^5 \{k(\sigma^3 + 2\sigma^{-1}) - (1+k)\sigma\} - \\ & - 2\alpha_3 R^{-3} \{6k(2\sigma^7 - \sigma^{-5}) + (1+k)(5\sigma^9 - 3\sigma^{-7})\} + \\ & + 6(1+k)b_1 R^3 \sigma + 5(1+k)\beta_5 R^{-5} (3\sigma^9 - \sigma^{-7}). \quad (22) \end{aligned}$$

Примем комплексные потенциалы в виде

$$\begin{aligned}\varphi_2(z) &= \sum_{m=1}^5 a_{2m-1}^{(2)} z^{2m-1} + \sum_{m=1}^4 \alpha_{2m-1}^{(2)} z^{1-2m}; \\ \psi_2(z) &= \sum_{m=1}^4 b_{2m-1}^{(2)} z^{2m-1} + \sum_{m=1}^5 \beta_{2m-1}^{(2)} z^{1-2m}.\end{aligned}\tag{23}$$

Подставив выражения (23) в равенство (22), получим уравнения для определения неизвестных коэффициентов комплексных потенциалов:

$$\left\{ \begin{aligned} a_9^{(2)} R_j^9 - 7\alpha_7^{(2)} R_j^{-7} + \beta_9^{(2)} R_j^{-9} &= \frac{1+k}{R_j} \left[\frac{15\beta_5^{(1)}}{R_j^4} - \frac{10\alpha_3^{(1)}}{R_j^2} - b_0(1+k) \right]; \\ \alpha_7^{(2)} R_j^{-7} + 9a_9^{(2)} R_j^9 + b_7^{(2)} R_j^7 &= \frac{1+k}{R_j} \left[b_0(1+k) + \frac{6\alpha_3^{(1)}}{R_j^2} - \frac{5\beta_5^{(1)}}{R_j^4} \right]; \\ a_7^{(2)} R_j^7 - 5\alpha_5^{(2)} R_j^{-5} + \beta_7^{(2)} R_j^{-7} &= \frac{4b_0k(1+k)}{R_j} - 24\alpha_3^{(1)} R_j^{-3} k; \\ \alpha_5^{(2)} R_j^{-5} + 7a_7^{(2)} R_j^7 + b_5^{(2)} R_j^5 &= \frac{4b_0k(1+k)}{R_j} + 12\alpha_3^{(1)} R_j^{-3} k; \\ a_5^{(2)} R_j^5 - 3\alpha_3^{(2)} R_j^{-3} + \beta_5^{(2)} R_j^{-5} &= \frac{2b_0(1-k^2)}{R_j}; \\ \alpha_3^{(2)} R_j^{-3} + 5a_5^{(2)} R_j^5 + b_3^{(2)} R_j^3 &= \frac{2b_0(1-k^2)}{R_j}; \\ a_3^{(2)} R_j^3 - \alpha_1^{(2)} R_j^{-1} + \beta_3^{(2)} R_j^{-3} &= -20a_5^{(1)} R_j^5 k; \\ \alpha_1^{(2)} R_j^{-1} + 3a_3^{(2)} R_j^3 + b_1^{(2)} R_j &= -40a_5^{(1)} R_j^5 k; \\ 2a_1^{(2)} R_j + \beta_1^{(2)} R_j^{-1} &= 20a_5^{(1)} R^5(1+k) + 6(1+k)b_3^{(1)} R_j^3.\end{aligned}\right.\tag{24}$$

Решая систему уравнений (24) с учетом равенств (20), (21), (23), получаем выражения для комбинаций напряжений во втором приближении. Аналогично может быть найдено решение задачи в любом приближении.

Проведено сравнение результатов, полученных предложенным методом, с известным решением [2], где рассматривается бесконечная ортотропная пластинка с круговым отверстием, нагруженная равномерно распределенным нормальным давлением интенсивности p по контуру. Согласно работе [2] определены наибольшие напряжения σ_θ в точках контура, лежащих по вертикали, при этом по методике, изложенной выше, принимали радиус внешнего контура пластинки $R_0 = 100R_1$. В полярной системе координат равенства (1) имеют вид

$$\Theta = \sigma_r + \sigma_\theta; \quad \Omega = (\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_\theta) e^{-2i\theta},\tag{25}$$

откуда компоненты напряжений равны:

$$\begin{cases} \sigma_r = \Theta/2 - (\Omega e^{2i\theta} + \bar{\Omega} e^{-2i\theta})/4; \\ \sigma_\theta = \Theta/2 + (\Omega e^{2i\theta} + \bar{\Omega} e^{-2i\theta})/4; \\ \tau_{r\theta} = i(\bar{\Omega} e^{-2i\theta} - \Omega e^{2i\theta})/4. \end{cases} \quad (26)$$

Полученные результаты показывают достаточно быстрое схождение разложений (7) для материалов, обладающих различной степенью анизотропии. Для материалов (КАСТ-В, полувагман, СТЭР-С-30, ПН-3), у которых отношение $E_1/E_2 < 1,5$, расхождение с известным решением после второго приближения составляет не более 3%. Для других материалов расхождение больше: например, для СВМ-ИММ ($E_1/E_2 = 3,92$) оно составляет 13%, для материала СПКН ($E_1/E_2 = 3,75$) – 10,6%. В этих случаях расчет может быть продолжен.

Численные исследования проведены для кольцевой пластинки, изготовленной из СВМ 15:1 ($E_1 = 4,51 \cdot 10^4$ МПа, $E_2 = 1,57 \cdot 10^4$ МПа, $G = 0,55 \cdot 10^4$ МПа, $\nu_1 = 0,27$), у которой радиус внешнего контура $R_0 = 1$, радиус внутреннего контура $R_1 = 0,5$. Пластика нагружена по внутреннему контуру равномерной нагрузкой интенсивности p , внешний контур – свободен от нагружения.

На рис. 1 приведено распределение тангенциальных нормальных напряжений σ_θ/p по вертикальному радиусу ортотропной пластинки (сплошная линия). Для сравнения штриховой линией показано аналогичное распределение для изотропной пластинки (нулевое приближение). Для анизотропной пластинки, в отличие от изотропной, наименьшее значение напряжения $\sigma_\theta/p = 0,76$ достигнуто при $r = 0,878$. Наибольшее напряжение, возникающее в точках внутреннего контура, превышает напряжение в соответствующей изотропной пластинке на 26,6%. Характер изменения радиального нормального напряжения по радиусу одинаков для анизотропной и изотропной пластинок.

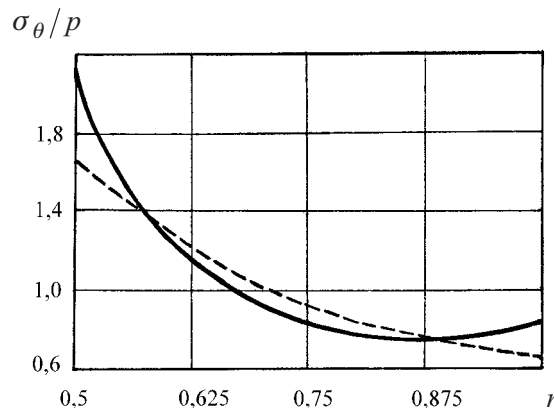


Рис. 1. Распределение тангенциальных нормальных напряжений по вертикальному радиусу пластинки.

Рис. 2 иллюстрирует распределение тангенциальных нормальных напряжений σ_θ/p по внутреннему контуру ортотропной пластинки. Штриховой линией показана аналогичная зависимость для изотропной пластинки (нулевое приближение). Для анизотропной пластинки наименьшее значение напряжения $\sigma_\theta/p = 1,409$ получено при $\varphi = 50,1^\circ$. Характер изменения тангенциального напряжения по внешнему контуру имеет такой же вид.

На рис. 3 показано изменение наибольшего тангенциального напряжения σ_θ/p в вертикальных точках внутреннего контура в зависимости от радиуса. С увеличением радиуса R_1 наблюдается резкий рост напряжений.

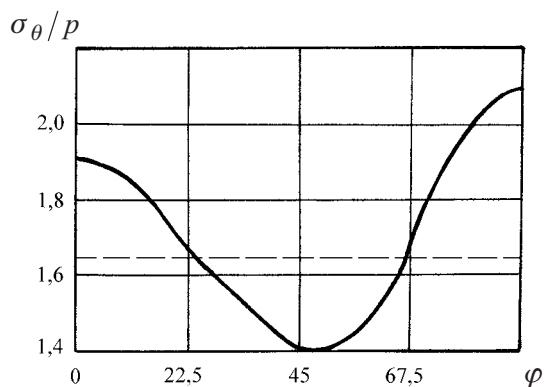


Рис. 2. Распределение тангенциальных нормальных напряжений по внутреннему контуру пластинки.

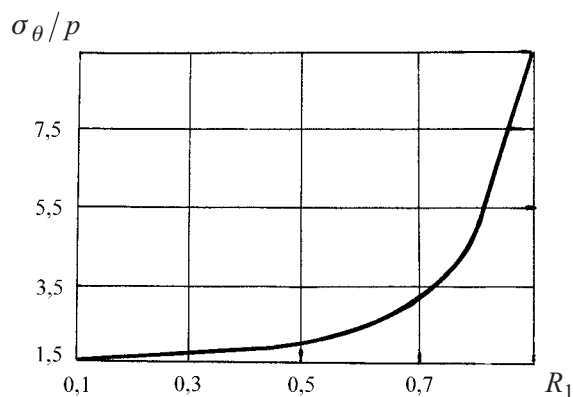


Рис. 3. Зависимость наибольшего тангенциального нормального напряжения от радиуса внутреннего контура.

Выводы

1. Предложен метод решения плоской задачи для ортотропных пластинок, основанный на разложении функций комбинаций напряжений в ряды по параметру. Параметр выбран таким образом, чтобы в нулевом приближении получалась соответствующая задача для изотропной пластинки.

2. Для кольцевой ортотропной пластинки полученные результаты достаточно хорошо совпадают (до 13%) уже во втором приближении с известным решением для различных ортотропных материалов.

3. Исследовано напряженное состояние ортотропной кольцевой пластинки и проведено сравнение с аналогичной изотропной пластинкой. Учет ортотропных свойств материала приводит к увеличению наибольших напряжений, возникающих в точках внутреннего контура, на 26,6%.

Резюме

Запропоновано метод розв'язку плоскої задачі для тонких ортотропних пластинок із використанням методу розкладання по параметру. Нульовим наближенням служить розв'язок відповідної ізотропної задачі. Для конкретних матеріалів показано хорошу збіжність результатів, що отримано запропонованим методом, із відомим розв'язком нескінченної пластинки з отвором. Досліджено напружений стан кільцевої ортотропної пластинки, наведено залежності розподілу напружень і проведено порівняння з аналогічною ізотропною пластинкою.

1. *Космодамианский А. С.* Новый подход к решению плоской задачи для многосвязной ортотропной пластинки // Теорет. и прикл. механика. – 2000. – Вып. 31. – С. 60 – 62.
2. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М., 1977. – 416 с.
3. *Космодамианский А. С.* Плоская задача теории упругости для пластин с отверстиями, вырезами и выступами. – Киев: Вища шк., 1975. – 227 с.
4. *Космодамианский А. С.* Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев: Вища шк., 1976. – 200 с.

Поступила 05. 09. 2000

Итерационный метод оценки критической скорости флаттера аэродинамического профиля в нестационарном потоке

А. В. Сафронов, В. А. Сафронов

Национальный научно-исследовательский центр оборонных технологий и военной безопасности Украины, Киев, Украина

Предложен метод, позволяющий на ранней стадии проектирования за три-четыре итерации определять критическую скорость флаттера аэродинамических профилей с применением теории крыла в нестационарном потоке и создавать авиационные конструкции с оптимальными весовыми характеристиками.

Разработке методов оценки критической скорости флаттера аэродинамического профиля посвящены многочисленные публикации [1–8]. Обычно оценка характеристик флаттера осуществляется по теории крыла в стационарном потоке. Ее особенность заключается в сравнительно простом определении действующих на колеблющийся профиль аэродинамических сил и моментов. Однако при этом величины критических скоростей флаттера оказываются значительно меньше критических скоростей, определяемых по теории крыла в нестационарном потоке, а конструкции более тяжелыми.

В отличие от этой задачи, исследование флаттера авиационных конструкций с использованием теории крыла в нестационарном потоке относится к весьма сложной задаче аэроупругости и обусловлено необходимостью решения громоздких систем нелинейных трансцендентных уравнений различными приближенными методами [2, 6, 8]. То есть поиск простых инженерных методов, позволяющих на ранней стадии проектирования авиационных конструкций достоверно оценивать характеристики флаттера, представляется актуальной научной задачей.

На наш взгляд, достоверные результаты при исследовании характеристик флаттера в нестационарном потоке можно получить с помощью метода итераций. При таком подходе в каждой отдельной итерации поставленная задача решается в линейной постановке.

Процедуру предлагаемого подхода изложим на примере оценки частоты колебаний и критической скорости изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля в нестационарном несжимаемом потоке. В этом случае, воспользовавшись результатами работы [2], систему дифференциальных уравнений совместных изгибно-крутильных колебаний профиля в потоке можно записать в виде

$$\begin{aligned} (m + \mu_0) \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + C_n Y(t) - (m\sigma + \mu_0 a) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} &= F(k; t); \\ (J + \Delta J) \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} + C_k \theta(t) - (m\sigma + \mu_0 a) \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} &= M(k; t), \end{aligned} \quad (1)$$

где m – погонная масса профиля; μ_0 – присоединенная погонная масса профиля; $Y(t)$ – изгибные колебания профиля; $C_{\text{и}}$ – жесткость профиля на изгиб; σ – расстояние между осью вращения и центром тяжести профиля (величина положительная, если центр тяжести расположен позади оси вращения); a – расстояние оси вращения от середины хорды (положительное при расположении оси ближе к передней кромке); $\theta(t)$ – крутильные колебания профиля; $F(k; t)$, $M(k; t)$ – нестационарные аэродинамические погонные силы и моменты, действующие на профиль; k – число Струхала; J – массовый погонный момент инерции профиля; ΔJ – присоединенный погонный момент инерции профиля; C_k – жесткость профиля крыла при кручении.

Присоединенные погонные масса и момент инерции профиля определяются из известных зависимостей [2, 6]

$$\mu_0 = \pi \rho b^2; \quad \Delta J = \mu_0 b^2 \left[\frac{1}{8} + \left(\frac{X_0}{b} - 1 \right)^2 \right],$$

где ρ – плотность воздуха; b – полухорда профиля; X_0 – расстояние от передней кромки профиля до оси его вращения.

Число Струхала, от величины которого зависят нестационарные аэродинамические сила и момент, определяется безразмерным отношением [2, 6]

$$k = \frac{b\omega}{V}, \quad (2)$$

где ω – круговая частота колебаний профиля при возникновении флаттера; V – скорость потока.

При принятой форме записи системы (1) нестационарные аэродинамические сила и момент, в соответствии с данными работ [2, 6], могут быть представлены зависимостями

$$F(k; t) = 2\pi b_0 q \left\{ \theta(t) C(k) + \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4} - \frac{X_0}{b_0} \right) C(k) \right] \frac{b_0}{V} \frac{d\theta(t)}{dt} - \frac{dY(t)}{V dt} C(k) \right\}; \quad (3)$$

$$M(k; t) = 2\pi b_0^2 q \left\{ \left(\frac{X_0}{b_0} - \frac{1}{4} \right) \theta(t) C(k) - \left(\frac{3}{4} - \frac{X_0}{b_0} \right) \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{X_0}{b_0} - \frac{1}{4} \right) C(k) \right] \frac{b_0}{V} \frac{d\theta(t)}{dt} - \left(\frac{X_0}{b_0} - \frac{1}{4} \right) \frac{dY(t)}{V dt} C(k) \right\}; \quad (4)$$

где b_0 – хорда профиля; $q = \frac{1}{2} \rho V^2$ – скоростной напор потока; $C(k) = F(k) + iG(k)$ – функция Теодорсена [2, 6].

Для удобства изложения материала введем следующие обозначения:
 $\omega_n^2 = \frac{C_n}{m + \mu_0}$, $\omega_k^2 = \frac{C_k}{J + \Delta J}$ – квадраты круговой частоты собственных изгибных и крутильных колебаний профиля в потоке при $V = 0$;

$$\begin{aligned} m_n &= m + \mu_0; \quad m_1 = m \left(1 + \frac{\mu_0 a}{m \sigma} \right); \quad J_n = J + \Delta J; \quad a_1 = 2\pi \frac{b_0}{m_n}; \\ a_2 &= \frac{1}{2} \pi \frac{b_0^2}{m_n}; \quad a_3 = 2\pi \frac{b_0^2}{m_n} \left(\frac{3}{4} - \frac{X_0}{b_0} \right); \quad b_1 = 2\pi \frac{b_0^2}{J_n} \left(\frac{X_0}{b_0} - \frac{1}{4} \right); \\ b_2 &= \frac{1}{2} \pi \frac{b_0^3}{J_n} \left(\frac{3}{4} - \frac{X_0}{b_0} \right); \quad b_3 = 2\pi \frac{b_0^3}{J_n} \left(\frac{X_0}{b_0} - \frac{1}{4} \right) \left(\frac{3}{4} - \frac{X_0}{b_0} \right). \end{aligned}$$

Тогда систему уравнений (1) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + \omega_n^2 Y(t) - \frac{m_1}{m_n} \sigma \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \\ &= a_1 q \theta(t) C(k) + a_2 \frac{q}{V} \frac{d\theta(t)}{dt} + a_3 \frac{q}{V} \frac{d\theta(t)}{dt} C(k) - a_1 \frac{q}{V} \frac{dY(t)}{dt} C(k); \\ &-\frac{m_1}{J_n} \sigma \frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + \omega_k^2 \theta(t) + \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} = \\ &= b_1 q \theta(t) C(k) - b_2 \frac{q}{V} \frac{d\theta(t)}{dt} + b_3 \frac{q}{V} \frac{d\theta(t)}{dt} C(k) - b_1 \frac{q}{V} \frac{dY(t)}{dt} C(k). \end{aligned} \quad (5)$$

Классическое решение системы уравнений (5) представляется в форме гармонических функций [6]:

$$\begin{aligned} Y(t) &= Y_0 e^{i\omega t}; \\ \theta(t) &= \theta_0 e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (6)$$

где Y_0, θ_0 – амплитуды изгибных и крутильных колебаний профиля.

Подставляя решение (6) в систему (5), получаем характеристическое уравнение колебаний профиля в нестационарном потоке:

$$\begin{aligned} &Y_0 \left[-\omega^2 + \omega_n^2 + a_1 \frac{q}{V} C(k) \right] + \\ &+ \theta_0 \left[\frac{m_1}{m_n} \sigma \omega^2 - a_1 q C(k) - i\omega a_2 \frac{q}{V} - i\omega a_3 \frac{q}{V} C(k) \right] = 0; \\ &Y_0 \left[\frac{m_1}{J_n} \sigma \omega^2 + i\omega b_1 \frac{q}{V} C(k) \right] + \\ &+ \theta_0 \left[-\omega^2 + \omega_k^2 - b_1 q C(k) + i\omega b_2 \frac{q}{V} - i\omega b_3 \frac{q}{V} C(k) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Отсюда после преобразований получим частотное уравнение

$$A_0\omega^4 + iA_1\omega^3 + A_2\omega^2 + iA_3\omega + A_4 = 0, \quad (8)$$

в котором комплексные величины представляются выражениями

$$A_0 = 1 - \frac{m_1^2}{m_n J_n} \sigma^2; \quad A_1 = \frac{q}{V} \left\{ a_2 \frac{m_1}{J_n} \sigma - b_2 + d_1 C(k) \right\};$$

$$A_2 = -\omega_k^2 - \omega_n^2 + d_2 q C(k); \quad A_3 = \frac{q}{V} \{ b_2 \omega_n^2 + d_3 C(k) \};$$

$$A_4 = \omega_k^2 \omega_n^2 - d_4 q C(k),$$

где

$$d_1 = b_3 - a_1 + \left(a_3 \frac{m_1}{J_n} - b_1 \right) \sigma; \quad d_2 = b_1 + a_1 \frac{m_1}{J_n} \sigma - \frac{1}{4} \rho \pi^2 \frac{b_0^4}{m_n J_n};$$

$$d_3 = a_1 \omega_k^2 - b_3 \omega_n^2; \quad d_4 = b_1 \omega_n^2.$$

Разделяя в уравнении (8) действительные и мнимые величины, получаем два действительных уравнения, которые запишем в виде

$$BF(k)V^2 - CG(k)V + D = 0; \quad (9)$$

$$A'_1 \omega^3 + d_2 VG(k) \omega^2 + A'_3 \omega - d_4 VG(k) = 0, \quad (10)$$

где

$$\begin{cases} B = \omega^2 d_2 - d_4; & C = (\omega^2 d_1 + d_3) \omega; \\ D = \frac{2}{\rho} [A_0 \omega^4 - (\omega_n^2 + \omega_k^2) \omega^2 + \omega_n^2]; \\ A'_1 = a_2 \frac{m_1}{J_n} \sigma - b_2 + d_1 F(k); \\ A'_3 = \omega_n^2 b_2 + d_3 F(k). \end{cases} \quad (11)$$

Уравнения (2), (9) и (10) представляют собой замкнутую нелинейную систему относительно неизвестных V , ω и k , точное решение которой невозможно. Данная система уравнений может быть решена методом итераций [9], полагая начальное значение числа Струхаля равным нулю ($k_1 = 0$).

При этом условии действительная и мнимая части функции Теодорсена в первой итерации соответственно равны [3, 6]:

$$F(k_1) = 1, 0; \quad (12)$$

$$G(k_1) = 0. \quad (13)$$

Условие (13) позволяет легко определить из уравнения (10) круговую частоту колебаний в первой итерации

$$\omega_1^2 = -\frac{A'_{31}}{A'_{11}}. \quad (14)$$

При известной круговой частоте колебаний из уравнения (9) определяется критическая скорость флаттера, которая во всех итерациях может быть представлена зависимостью

$$V_i = \frac{1}{2B_i F(k_i)} \{C_i G(k_i) + [C_i^2 G^2(k_i) - 4B_i D_i F(k_i)]^{1/2}\}. \quad (15)$$

Определив ω_1 и V_1 из отношения, аналогичного (2), найдем число Струхала

$$k_2 = \frac{b\omega_1}{V_1},$$

а затем действительные $F(k_2)$ и мнимые $G(k_2)$ части функции Теодорсена во втором приближении.

Отличительной особенностью выполнения второй и последующих итераций является то, что круговая частота колебаний при флаттере должна определяться из кубического уравнения (10), которое может быть решено различными приближенными методами [9]. Эти методы достаточно громоздки и не всегда удобны для практического применения.

Поскольку для реальных аэродинамических профилей последний член уравнения (10) представляет собой величину малого порядка, решение этого уравнения можно записать в виде суммы

$$\omega_i = \omega_{in} + \Delta\omega_i, \quad (16)$$

где ω_{in} – приближенное значение круговой частоты колебаний, получаемое из решения уравнения (10) без учета последнего члена; $\Delta\omega_i$ – приращение круговой частоты колебаний, получаемое из этого же уравнения, записанного в приращениях.

Подставляя сумму (16) в уравнение (10), получаем два независимых уравнения:

$$A'_{1i}\omega_{in}^2 + d_2 V_{i-1} G(k_i) \omega_{in} + A'_{3i} = 0; \quad (17)$$

$$A'_{1i}\Delta\omega_i^2 + [2A'_{1i}\omega_{in} + d_2 V_{i-1} G(k_i)]\Delta\omega_i = \frac{d_4}{\omega_{in} + \Delta\omega_i} V_{i-1} G(k_i), \quad (18)$$

где A'_{1i} и A'_{3i} определяются по формулам (11), в которых вместо ω и k следует подставить ω_i и k_i соответственно.

Из уравнения (17) находим приближенное значение круговой частоты колебаний аэродинамического профиля

$$\omega_{in} = \frac{1}{2A'_{1i}} \{-d_2 V_{i-1} G(k_i) \pm [d_2^2 V_{i-1}^2 G^2(k_i) - 4A'_{1i} A'_{3i}]^{1/2}\}. \quad (19)$$

Определив приближенное значение круговой частоты колебаний из уравнения (19), можно перейти к оценке приращения круговой частоты колебаний из уравнения (18). С этой целью уравнение (18) представим в виде

$$\begin{aligned} &A'_{1i} \Delta\omega_i^3 + [3A'_{1i} \omega_{in} + d_2 V_{i-1} G(k_i)] \Delta\omega_i^2 + \\ &+ [2A'_{1i} \omega_{in} + d_2 V_{i-1} G(k_i)] \omega_{in} \Delta\omega_i - d_4 V_{i-1} G(k_i) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Поскольку абсолютная величина приращения круговой частоты колебаний мала, то даже для относительно легких аэродинамических профилей первый член уравнения (20) оказывается на несколько порядков меньше других членов этого уравнения. Следовательно, в инженерных расчетах этим членом можно пренебречь и вместо кубического рассматривать квадратное уравнение

$$\begin{aligned} &[3A'_{1i} \omega_{in} + d_2 V_{i-1} G(k_i)] \Delta\omega_i^2 + \\ &+ [2A'_{1i} \omega_{in} + d_2 V_{i-1} G(k_i)] \omega_{in} \Delta\omega_i - d_4 V_{i-1} G(k_i) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Из уравнения (21) легко можно получить приращение круговой частоты колебаний аэродинамического профиля.

Подставляя величины приближенных значений ω_{in} и $\Delta\omega_i$ в выражение (16), получаем результирующее значение круговой частоты колебаний во второй и последующих итерациях.

Отметим, что погрешность определения круговой частоты колебаний предложенным методом составляет десятые доли процента, т.е. представление круговой частоты колебаний аэродинамического профиля в виде суммы (16) позволяет привести решение кубического уравнения (10) к классическому решению двух независимых уравнений второго порядка и с большой точностью определять круговую частоту колебаний аэродинамического профиля в каждой итерации.

Процесс итерации продолжается до тех пор, пока в двух последующих итерациях отличие по критической скорости флаттера аэродинамического профиля не превышает принятой в расчете погрешности.

Изложенный подход обеспечивает быструю сходимость итерационного процесса. Выполненные расчеты показывают, что отличие по частоте колебаний и критической скорости флаттера уже в третьей и четвертой итерациях не превышает 1,0%.

Для сравнения результатов, полученных предложенным методом, с данными работы [2] оценим критическую скорость изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля при различных значениях относительной массы профиля:

$$\bar{m} = \frac{m}{\mu_0}.$$

Расчеты выполняли при следующих исходных данных: $b = 1,0$ м; $X_0 = 0,6$ м; $\sigma = 0,1$ м; $\rho = 0,125$ кг · м⁻⁴ · с²; $\omega_{и} = 0$.

Зависимость момента инерции от массы и геометрических характеристик профиля представим выражением [2, 6]

$$J = mb^2R^2,$$

где R – радиус инерции аэродинамического профиля, $R^2 = 0,25$.

Критическую скорость флаттера запишем в безразмерной форме [2]:

$$\bar{V}_i = \frac{V_i}{b\omega_k}.$$

Для упрощения вычислений введем следующие относительные величины:

$$\bar{A}'_{3i} = \frac{A'_{3i}}{\omega_k^2}; \quad \bar{C}_1 = \frac{C_i}{\omega_k^2}; \quad \bar{D}_i = \frac{D_i}{\omega_k^2}; \quad \bar{B}_i = \frac{B_i}{\omega_k^2}; \quad \bar{\omega}_i = \frac{\omega_i}{\omega_k}.$$

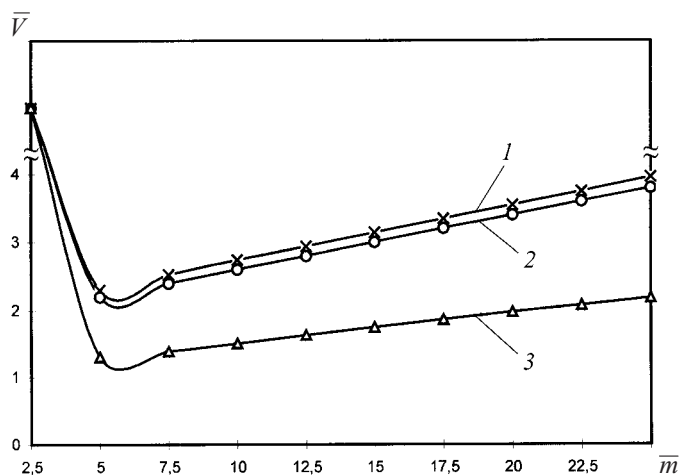
Изменение этих величин и параметров изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля по итерациям при $\bar{m} = 20,0$ приведено в таблице.

Результаты расчетов изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля в нестационарном потоке при $\bar{m} = 20,0$

№ итерации	k_i	$F(k_i)$	$-G(k_i)$	$-A'_i$	\bar{A}'_{3i}	$\bar{\omega}_i$	\bar{B}_i	\bar{C}_i	$-\bar{D}_i$	\bar{V}_i
1	0	1,000	0	2,804	1,524	0,736	0,547	0,552	4,228	2,780
2	0,265	0,683	0,183	2,669	1,041	0,535	0,289	0,750	3,337	3,780
3	0,142	0,779	0,185	2,710	1,187	0,544	0,299	0,761	3,404	3,530
4	0,154	0,768	0,187	2,705	1,170	0,546	0,301	0,763	3,416	3,547

Сравнение критических скоростей флаттера, полученных методом итераций, с результатами работы [2] при различных величинах \bar{m} приведено на рисунке. Видно, что максимальное отличие сравниваемых результатов при значениях относительных масс, близких к реальным ($\bar{m} \geq 20,0$), не превышает 4...5%. Там же представлены результаты оценки критической скорости флаттера по теории крыла в стационарном потоке [6, 10]. Их сравнение показывает, что критическая скорость изгибно-крутильного флаттера

в этом случае оказывается значительно меньше, т.е. реальные запасы по критической скорости изгибно-крутильного флаттера аэродинамических поверхностей оказываются больше нормируемых. Этот факт был неоднократно подтвержден и другими экспериментальными исследованиями [4].



Сравнение критической скорости флаттера аэродинамического профиля в стационарном и нестационарном потоке: 1 – метод итераций; 2 – по данным работы [2]; 3 – для стационарного потока.

Таким образом, предложенный метод по сравнению с известными обеспечивает достаточно быструю сходимость итерационного процесса и позволяет более достоверно, чем по теории крыла в стационарном потоке, определять критическую скорость изгибно-крутильного флаттера аэродинамических поверхностей и проектировать конструкции с оптимальными по условиям флаттера весовыми характеристиками.

Резюме

Запропоновано метод, який дозволяє на ранній стадії проектування за тричотири ітерації визначати критичну швидкість флатера аеродинамічних профілів із використанням теорії крила в нестационарному потоці і створювати авіаційні конструкції з оптимальними ваговими характеристиками.

1. Белоцерковский С. М., Кочетков Ю. А., Красовский А. А., Новицкий В. В. Введение в аэроавтоупругость. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. Бисплингхофф Р. Л., Эшли Х., Халфмэн Р. Л. Аэроупругость. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959. – 799 с.
3. Смирнов А. И. Аэроупругая устойчивость летательных аппаратов. – М.: Машиностроение, 1980. – 231 с.
4. Келдыш М. В. Избранные труды. Механика. – М.: Наука, 1985. – 568 с.
5. Гурьянов И. А., Котовский В. Н., Нишит М. И. Математическое моделирование нестационарного обтекания вязким потоком телесного крыла конечного размаха // Учен. зап. ЦАГИ. – 1991. – 22, № 3. – С. 35 – 42.

6. Некрасов А. И. Сравнительный анализ расчета флаттера по теории неустановившегося и установившегося потоков // Инж. сб. – 1951. – **10**. – С. 109 – 168.
7. Левкин В. Ф. Экспериментальные исследования нестационарных аэродинамических характеристик поверхности управления при трансзвуковых скоростях // Тр. ЦАГИ. – 1982. – Вып. 2132. – 16 с.
8. Нуштаев Ю. П. Нестационарные аэродинамические характеристики профиля в трансзвуковом потоке идеального газа // Учен. зап. ЦАГИ. – 1982. – **13**, № 1. – С. 1 – 10.
9. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике. – М.: Физматгиз, 1961. – 784 с.
10. Сафронов А. В., Сафронов В. А. Графо-аналитические методы параметрической оценки характеристик изгибно-крутильного флаттера аэродинамического профиля // Пробл. прочности. – 1997. – № 4. – С. 95 – 106.

Поступила 21. 03. 2001

Устойчивость колонны буровой установки роторного типа

Г. М. Улитин

Донецкий государственный технический университет, Донецк, Украина

На основе уравнения изгиба весомого стержня исследована задача устойчивости буровой колонны роторного типа. Получено уравнение для определения критической длины в случае растяжения–сжатия. Выполнены расчеты критической длины в зависимости от натяжения талевого системы для буровой установки “WIRTH”.

Особенность роторного способа бурения заключается в приложении растягивающего усилия N (натяжение талевого системы) к верхнему концу бурильной колонны, вследствие чего вся колонна находится в условиях растяжения–сжатия. В настоящей работе, в отличие от работ [1–3], рассмотрен другой подход к решению задач устойчивости бурильных колонн, основанный на использовании функций Ломмеля [4] на примере роторного способа бурения при проходке вертикальных стволов. Такой прием позволяет получить аналитические решения для любых внешних нагрузок с учетом состыковки растянутой и сжатой частей колонны.

В качестве математической модели устойчивости бурильной колонны примем упругий стержень длиной l с весом q единичной длины, нагруженный поперечной распределенной нагрузкой p . На верхнем конце при $x = l$ приложена растягивающая сила N и горизонтальная реакция R направляющих бурильной колонны.

Уравнение изогнутой оси весомого стержня представим в виде

$$EJy'''' + (ql - N - qx)y' = -R + p(x - l). \quad (1)$$

С помощью замен $\xi = ql - N - qx$ и $u = y'$ оно преобразуется следующим образом:

$$u''_{\xi\xi} + a^2\xi u = -a^2\left(R + \frac{p}{q}N\right) - \frac{a^2}{q}p\xi, \quad (2)$$

где $a^2 = (EJq^2)^{-1}$; EJ – изгибная жесткость стержня.

Точка $\xi_0 = 0$ является точкой ветвления решения линейного дифференциального уравнения (2). При этом на верхнем участке стержня имеем $\xi < 0$ (растяжение), на нижнем – $\xi > 0$ (сжатие).

Рассмотрим решение уравнения (2) для нижнего участка стержня. Неоднородному линейному дифференциальному уравнению (2) соответствует однородное

$$u''_{\xi\xi} + a^2\xi u = 0,$$

решение которого известно [5]:

$$u(\xi) = C_1 \xi^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) + C_2 \xi^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right),$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные; $J_{1/3}(z)$ и $J_{-1/3}(z)$ – функции Бесселя первого рода.

Вронскиан фундаментальной системы функций

$$\varphi_1(\xi) = \xi^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right), \quad \varphi_2(\xi) = \xi^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right), \quad w(\varphi_1, \varphi_2) = -\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}.$$

С использованием общего решения однородного уравнения методом вариации произвольных постоянных получаем общее решение уравнения (2):

$$\begin{aligned} u(\xi) = & C_1 \xi^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) + C_2 \xi^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) - \\ & - \frac{2\pi a^2}{3\sqrt{3}} \left(R + \frac{p}{q} N \right) \left(\xi^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) \int_0^\xi \xi^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) d\xi - \right. \\ & \left. - \xi^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) \int_0^\xi \xi^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) d\xi \right) - \\ & - \frac{2\pi a^2 p}{3\sqrt{3} q} \left(\xi^{1/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) \int_0^\xi \xi^{3/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) d\xi - \right. \\ & \left. - \xi^{1/2} J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) \int_0^\xi \xi^{3/2} J_{1/3} \left(\frac{2}{3} a \xi^{3/2} \right) d\xi \right). \end{aligned}$$

Если ввести новую переменную $z = \frac{2}{3} a \xi^{3/2}$, то

$$\begin{aligned} u(z) = & C_1 z^{1/3} J_{1/3}(z) + C_2 z^{1/3} J_{-1/3}(z) - \\ & - \left(R + \frac{p}{q} N \right) z^{1/3} \left(\frac{2a}{3} \right)^{2/3} S_{0,1/3}(z) - \frac{p}{q} z^{1/3} S_{2/3,1/3}(z), \end{aligned}$$

где $S_{\mu,\nu}(z)$ – функции Ломмеля [4].

Переходя к новой переменной z , после интегрирования получаем уравнение изогнутой оси стержня:

$$y(z) = C_1 \bar{J}_{1/3}(z) + C_2 \bar{J}_{-1/3}(z) + C_3 +$$

$$+ \frac{2}{3q} \left(R + \frac{p}{q} N \right) \bar{S}_{0,1/3}(z) + \frac{p}{q} \left(\frac{2}{3a^2} \right)^{1/3} \bar{S}_{2/3,1/3}(z), \quad (3)$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные;

$$\bar{J}_{\pm 1/3}(z) = \int_0^z J_{\pm 1/3}(z) dz; \quad \bar{S}_{\mu,\nu}(z) = \int_0^z S_{\mu,\nu}(z) dz.$$

Рассмотрим случай, когда $p = 0$ при граничных условиях для уравнения (1):

$$y(0) = y'_x(0) = 0; \quad y(l) = y'_x(l) = 0. \quad (4)$$

Эти условия наиболее соответствуют случаю бурения при проходке вертикальных стволов для роторного способа бурения.

Для удовлетворения граничных условий необходимо знать выражения для углов поворота $y'_x(z)$, изгибающего момента $M(z)$ и поперечной силы $Q(z)$, которые с учетом рекуррентных соотношений для функций Бесселя и Ломмеля [4] принимают вид

$$\begin{cases} y'_x(z) = -aq \left(\frac{3z}{2a} \right)^{1/3} \left(C_1 J_{1/3}(z) + C_2 J_{-1/3}(z) + \frac{2R}{3q} S_{0,1/3}(z) \right); \\ M(z) = \left(\frac{3z}{2a} \right)^{2/3} \left(C_1 J_{-2/3}(z) - C_2 J_{2/3}(z) - \frac{4R}{9q} S_{-1,-2/3}(z) \right); \\ Q(z) = \frac{3}{2} qz \left(C_1 J_{1/3}(z) + C_2 J_{-1/3}(z) - \frac{16R}{27q} S_{-2,1/3}(z) \right). \end{cases} \quad (5)$$

Аналогично можно получить решение для верхнего участка стержня при растяжении:

$$\begin{cases} y(z) = C_1^* \bar{I}_{1/3}(z) + C_2^* \bar{I}_{-1/3}(z) + C_3^* + \frac{2R^*}{3q} \bar{G}_{0,1/3}(z); \\ y'_x(z) = aq \left(\frac{3z}{2a} \right)^{1/3} \left(C_1^* I_{1/3}(z) + C_2^* I_{-1/3}(z) + \frac{2R^*}{3q} G_{0,1/3}(z) \right); \\ M(z) = \left(\frac{3z}{2a} \right)^{2/3} \left(C_1^* I_{-2/3}(z) - C_2^* I_{2/3}(z) - \frac{4R^*}{9q} G_{-1,2/3}(z) \right); \\ Q(z) = -\frac{3}{2} qz \left(C_1^* I_{1/3}(z) + C_2^* I_{-1/3}(z) - \frac{16R^*}{27q} G_{-2,1/3}(z) \right), \end{cases} \quad (6)$$

где $z = \frac{2}{3} a(qx - ql + N)^{3/2}$, $I_{1/3}(z)$, $I_{-1/3}(z)$, $G_{\mu,\nu}(z)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и Ломмеля; звездочкой обозначены постоянные для верхнего участка колонны;

$$\bar{I}_{\pm 1/3}(z) = \int_0^z I_{\pm 1/3}(z) dz; \quad \bar{G}_{0,1/3}(z) = \int_0^z G_{0,1/3}(z) dz.$$

Выражения (3), (5) и (6) позволяют удовлетворить различным граничным условиям и условиям сопряжения участков. На границе стыковки двух участков воспользуемся условием равенства перемещений, углов поворота, моментов и поперечных сил при $z_0 = 0$. Из этих равенств получаем зависимости

$$C_1 = C_1^*, \quad C_2 = -C_2^*, \quad C_3 = C_3^*, \quad R = -R^*. \quad (7)$$

Из условий сопряжения следует, что растянутая часть колонны не остается прямолинейной при потере устойчивости. Этот факт в работе [1] показан при использовании на участке растяжения приближенного уравнения.

Удовлетворяя граничным условиям (4), получаем однородную систему линейных уравнений относительно C_1, C_2, C_3, R с учетом соотношений (7). Приравнявая определитель этой системы к нулю, приходим к уравнению для определения критических длин:

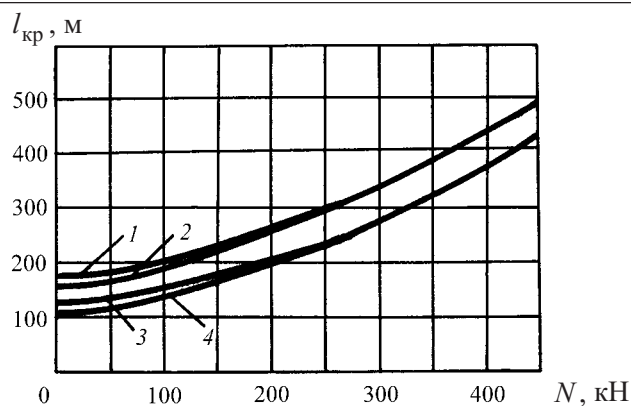
$$\begin{aligned} & (\bar{J}_{1/3}(\alpha) - \bar{I}_{1/3}(\beta))(J_{-1/3}(\alpha)G_{0,1/3}(\beta) + I_{-1/3}(\beta)S_{0,1/3}(\alpha)) - \\ & - (\bar{J}_{-1/3}(\alpha) + \bar{I}_{-1/3}(\beta))(J_{1/3}(\alpha)G_{0,1/3}(\beta) - I_{1/3}(\beta)S_{0,1/3}(\alpha)) - \\ & - (\bar{S}_{0,1/3}(\alpha) - \bar{G}_{0,1/3}(\beta))(J_{1/3}(\alpha)I_{-1/3}(\beta) + J_{-1/3}(\alpha)I_{1/3}(\beta)) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\alpha = \frac{2}{3} a(ql - N)^{3/2}$; $\beta = \frac{2}{3} aN^{3/2}$.

Вычисление корней α_i уравнения (8) проведено для буровой установки “WIRTH” со следующими параметрами: $EJ = 88,55 \text{ МН} \cdot \text{м}^2$; $q = 1331 \text{ Н/м}$. Первому минимальному положительному значению α_1 соответствует критическая длина, определяемая по формуле

$$l_{\text{кр}} = \frac{1}{q} \left(\frac{3\alpha_1}{2a} \right)^{2/3} + \frac{N}{q}.$$

Аналогично можно получить уравнения для определения критической длины при различном закреплении концов стержня. Рисунок иллюстрирует зависимости критической длины $l_{\text{кр}}$ от растягивающей силы N . Видно, что с увеличением глубины бурения вид граничного условия на верхнем конце стержня практически не влияет на его устойчивость [1].



Зависимость критической длины стержня от растягивающей силы при различных видах граничных условий для буровой установки "WIRTH": 1, 2, 3, 4 – соответственно жесткая заделка верхнего и нижнего концов, жесткая заделка нижнего и шарнирное закрепление верхнего, шарнирное закрепление нижнего и жесткая заделка верхнего, шарнирное закрепление верхнего и нижнего концов стержня.

Вышеприведенный расчет критических длин позволяет путем регулирования натяжения талевого системы предотвратить потерю устойчивости буровой колонны.

Предложенный подход к решению задач устойчивости вращающегося стержня дает возможность, в отличие от работы [1], рассматривать граничные условия как смешанного вида, так и неоднородные. Кроме того, с использованием асимптотических представлений функций Бесселя и Ломмеля для больших значений аргумента несложно получить корни уравнения устойчивости для больших глубин бурения, что ранее представляло определенные трудности [6]. Так, например, если положить $N = 0$, то для граничных условий (4) имеем уравнение $\operatorname{tg}(\alpha - 5\pi/12) = \alpha \ln \alpha$, минимальный положительный корень которого $\alpha_1 = 2,45$. По результатам работы [1], соответствующий корень $\alpha_1 = 2,37$, при этом он получен численными методами.

Резюме

На основі рівняння згину вагомого стрижня досліджено задачу стійкості бурової колони роторного типу. Одержано рівняння для визначення критичної довжини у випадку розтягу–стиску. Виконано розрахунки критичної довжини в залежності від натягу талевої системи для бурової установки "WIRTH".

1. Сароян А. Е. Теория и практика работы буровой колонны. – М.: Недра, 1990. – 264 с.
2. Сароян А. Е. Буровые колонны в глубоком бурении. – М.: Недра, 1979. – 232 с.
3. Эпштейн Е. Ф., Мазейчик В. И., Ивахнин И. И., Асатурян А. Ш. Расчет буровых труб в геологическом бурении. – М.: Недра, 1979. – 160 с.

4. *Ватсон Г. И.* Теория бесселевых функций. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1949. – 798 с.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
6. *Тихонов В. С., Агеева И. Ю.* Свободные колебания вращающейся глубоководной буровой колонны // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Киев. гос. техн. ун-т стр-ва и архитектуры, 1996. – Вып. 62. – С. 135 – 142.

Поступила 09. 11. 2000

ПРОИЗВОДСТВЕННЫЙ РАЗДЕЛ

УДК 621.96

О динамическом разрезании кожухов обтекателей боевых частей из алюминиевого сплава АМгб

В. К. Голубев, В. А. Медведкин

Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики, Саров, Россия

Экспериментально получена зависимость длины прорезания кожухов боевых частей типа 9Е-1028 из алюминиевого сплава АМгб толщиной 1,0 мм от начальной скорости разогнанного с помощью взрыва массивного ножа. На основе этих данных определена сила сопротивления резу. Соответствующее этой силе среднее напряжение на поверхности прорезания сопоставимо с пределом текучести сплава АМгб.

Обозначения

- m_e – масса заряда взрывчатого вещества
- m_k – масса ножа
- v_k – скорость ножа
- l – длина прорезания
- E – кинетическая энергия ножа
- F – сила сопротивления резу
- \bar{F} – среднее значение силы
- s_n – стандартное отклонение для выборки
- s_F – стандартное отклонение для среднего значения силы
- S_c – площадь участка прорезаемой поверхности
- σ_c – среднее напряжение на участке прорезаемой поверхности
- $\sigma_{0,2}$ – предел текучести

В настоящее время проблема разборки и утилизации боеприпасов, снятых с вооружения и с истекшим сроком хранения, является весьма актуальной и довольно сложной. Ее решение связано с безопасностью, экономикой и экологией. Процесс разборки конкретного боеприпаса, как правило, включает в себя разрушение корпуса или его отдельных элементов, извлечение из него заряда взрывчатого вещества (ВВ), токсичных или радиоактивных материалов, других узлов и деталей снаряжения. Разрушение корпуса производится путем его разрезания с использованием удлиненных кумулятивных зарядов, водяной струи высокого давления с абразивными

частицами, металлорежущих станков с автоматизированным приводом и дистанционным управлением. При решении одной конкретной задачи была разработана простая, экономичная и безопасная установка [1] для разрезания тонкостенных алюминиевых корпусов целого класса боевых частей типа АБ-62, 9Е-1028, а также содержащих поражающие элементы из обедненного урана.

Установка представляет собой закрепленные на одной раме взрывную камеру, разгонный отсек и барабан с пятью гнездами для разбираемых боевых частей. В качестве режущего инструмента используется поршень с закрепленным на нем ножом с пятью лезвиями (рис. 1). Лезвия ножа из инструментальной стали толщиной 5,6 мм имеют обратную стреловидность с углом 60° по отношению к направлению рабочего движения. Углы заточки режущей и внешних кромок лезвия также составляют 60° . Разгон поршня до необходимой скорости осуществляется за счет подрыва во взрывной камере небольшого заряда ВВ. Скорость ножа измеряется с помощью двух электромагнитных датчиков, размещаемых на корпусе разгонного отсека. Для перехода от одного типа боевой части к другому необходимо произвести лишь замену установочных барабанов.

В данной работе приведены результаты одного из этапов отработки методики, а именно: результаты определения динамического усилия, необходимого для разрезания кожухов обтекателей боевых частей типа 9Е-1028. Собственно, кожух представляет собой цилиндр из алюминиевого сплава АМг6 длиной 173 мм внешним диаметром 170 мм и толщиной стенки 1,0 мм. В экспериментах использовали кожухи, полученные при предшествующей разборке боевых частей. В установочные гнезда барабана вставляли по пять кожухов таким образом, чтобы их разрезание проводилось в местах, примерно диаметрально противоположных предшествующим прорезам. Для разгона ножа использовали ВВ НИЛ-2 с плотностью наполнения $0,41 \text{ г/см}^3$. Подрыв заряда ВВ производили с помощью капсуля-детонатора АТЭД 4.000.8, устанавливаемого непосредственно во взрывной камере. В каждом эксперименте двумя электромагнитными датчиками измеряли скорость ножа при его подходе к барабану. После окончания эксперимента визуально наблюдали вид разреза и измеряли его длину для каждого из кожухов.



Рис. 1. Режущий инструмент для разрезания тонкостенных алюминиевых корпусов боевых частей.



Рис. 2. Внешний вид одного из разрезанных кожухов обтекателя боевой части 9Е-1028.

Результаты опытов по неполному разрезанию кожухов обтекателей боевых частей

m_e , г	v_k , м/с	l , мм	E , Дж	F , кН
0,55	8,4	53	399	7,52
0,80	9,6	75	521	6,94
1,10	11,0	96	684	7,12
1,30	11,1	92	696	7,57
1,50	11,0	105	684	6,51
1,55	10,9	98	671	6,85
1,85	12,3	120	855	7,12
2,20	14,1	170	1123	6,61
2,90	17,1	236*	1652	7,00

* Устанавливали по два кожуха в каждое гнездо, реальная длина прорезания составляла 118 мм.

Полученные экспериментально данные представлены в таблице, где m_e – масса заряда ВВ НИЛ-2; v_k – экспериментально зарегистрированная скорость ножа; l – длина прорезания; E – кинетическая энергия ножа; F – оцененное значение силы сопротивления резу. В одном из экспериментов в каждое гнездо устанавливали по два кожуха. В этом случае реальная длина прорезания составила $l/2$. В качестве примера на рис. 2 показан внешний вид одного из разрезанных кожухов.

Исходя из предварительного анализа данных можно было сразу же предположить, что в рассматриваемом диапазоне скоростей нагружения сила сопротивления резу является величиной постоянной, не зависящей от скорости ножа. Приведенные в таблице значения получены в результате элементарной оценки величины $F = E/l$, где $E = m_k v_k^2 / 2$; m_k – масса ножа, $m_k = 11,3$ кг. Согласно данным таблицы, среднее значение этой силы $\bar{F} = \sum F_i / n$ составляет 7,03 кН, стандартное отклонение для выборки $s_n = 0,36$ кН, стандартное отклонение $s_F = 0,12$ кН. Оценить среднее значение силы сопротивления резу можно также несколько другим способом. Представив результаты в координатах $l - E$ и построив линию регрессии, проходящую через нулевую точку, определим коэффициент ее наклона. Он также будет характеризовать среднее значение силы сопротивления \bar{F} , равное в нашем случае 6,94 кН и имеющее стандартное отклонение $s_F = 0,10$ кН.

Экспериментальная и расчетная зависимости $l(v_k)$ приведены на рис. 3. При $\bar{F} = 6,94$ кН усилие, затрачиваемое на прорезание одного кожуха, составляет 1,39 кН, энергия, необходимая для его полного разрезания, – 0,240 кДж.

Представляется целесообразным сопоставить полученные результаты по условиям разрезания кожухов с данными по механическим свойствам сплава АМг6. Используемый режим прорезания обусловлен пластической деформацией сплава в зоне нагружения с характерным размером, близким к толщине лезвия ножа. Оценим среднее напряжение σ_c на участке прорезаемой поверхности кожуха шириной, равной толщине лезвия ножа. Площадь этого участка $S_c = 5,6 \text{ мм}^2$, поэтому для $\sigma_c = \bar{F} / 5S_c$ получим

значение 248 МПа. Согласно справочным данным [2], для листов из сплава АМг6 толщиной 2 мм предел текучести $\sigma_{0,2}$ в зависимости от степени нагартовки изменяется от 180 МПа в отожженном состоянии до 300 МПа при степени нагартовки 20% и далее до 345 МПа при последующей нагартовке до 30%. Таким образом, оцененное значение σ_c соответствует пределу текучести сплава АМг6 со степенью нагартовки около 10%.

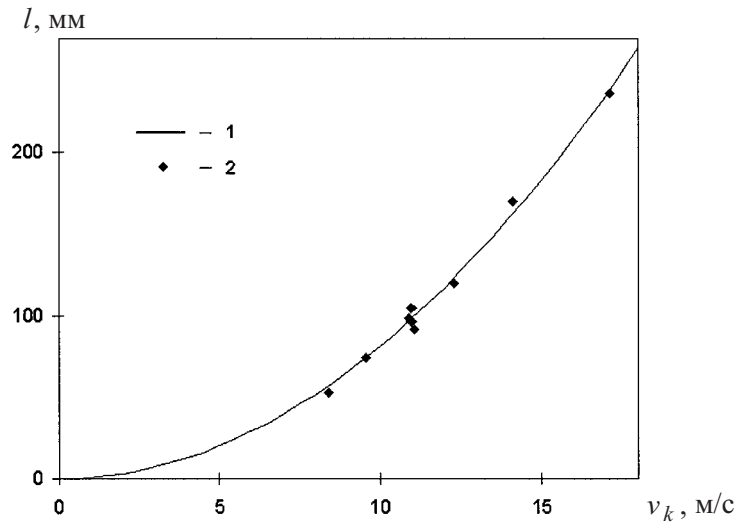


Рис. 3. Зависимость длины прорезания от скорости режущего инструмента: 1 – расчет с использованием значения $\bar{F} = 6,94$ кН; 2 – экспериментальные данные.

В работе [3] приведено решение задачи о вдавливании жесткого клина в пластическую среду. Из решения следует, что при использовании клина с углом 60° напряжение σ_c , соответствующее усилию вдавливания, будет равно $1,5\sigma_{0,2}$. Решение указанной задачи относится к условиям плоского деформированного состояния. В нашем случае реализуются условия плоского напряженного состояния, поэтому снижение величины σ_c до уровня $\sigma_{0,2}$ является вполне закономерным.

Можно отметить, что полученные результаты по определению силы сопротивления резу и их корреляция с пределом текучести позволяют прогнозировать условия разрезания корпусов боеприпасов, выполненных из других алюминиевых сплавов и имеющих иные размеры и толщины кожухов.

Резюме

Експериментально отримано залежність довжини прорізання кожухів бойових частин типу 9Е-1028 з алюмінієвого сплаву АМг6 товщиною 1,0 мм від початкової швидкості масивного ножа, що розганяється за допомогою вибуху. На основі цих даних визначено силу опору розрізу. Середні напруження на поверхні прорізання, що відповідає цій силі, зіставляване з границею текучості сплаву АМг6.

1. *Медведкин В. А.* Установка для разрезания корпусов боеприпасов: Патент на изобретение № 2129251 РФ // Бюллетень изобретений. – 1999. – № 11. – С. 409 – 411.
2. *Алиева С. Г., Альтман М. Б., Амбарцумян С. М. и др.* Промышленные алюминиевые сплавы: Справочник. – М.: Металлургия, 1984. – 528 с.
3. *Писаренко Г. С., Можаровский Н. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.

Поступила 19. 07. 99

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 539.3

Вариационный принцип для температурной задачи теории упругости в напряжениях

Н. М. Бородачев, Н. И. Савченко

Киевский международный университет гражданской авиации, Киев, Украина

При расчетах деталей и элементов конструкций на прочность часто используется вариационная формулировка задачи. В работе предлагается вариационный принцип, уравнениями Эйлера которого являются дифференциальные уравнения термоупругости в напряжениях.

Ключевые слова: температурная задача теории упругости, вариационный принцип, термодинамический потенциал.

Вариационные принципы минимума потенциальной энергии и минимума дополнительной работы впервые обобщены Майзелем [1] на случай температурной задачи теории упругости. Вариационным принципам термоупругости посвящены исследования [2–5].

Температурные задачи теории упругости можно формулировать в перемещениях и в напряжениях [6]. Оба подхода могут основываться как на дифференциальных уравнениях, так и на вариационных принципах.

При формулировании задачи в перемещениях используются либо дифференциальные уравнения термоупругости в перемещениях (включая граничные условия), либо вариационный принцип минимума потенциальной энергии системы, обобщенный на случай учета температурных слагаемых [7].

Формулировать задачу термоупругости в напряжениях целесообразно при решении второй краевой задачи (статическая), т.е. когда на поверхности тела задается распределение поверхностных сил. При решении задачи термоупругости в напряжениях основой служат уравнения статики в объеме и условия совместности. Поэтому из вариационного принципа для этой задачи в качестве уравнений Эйлера должны одновременно получаться как уравнения равновесия, так и условия совместности в напряжениях. Ниже формулируется такой вариационный принцип.

Рассмотрим линейно-упругое тело, которое под действием температурного поля, а также массовых и поверхностных сил в состоянии равновесия занимает объем V . Через O обозначим поверхность, ограничивающую этот объем.

Следуя Лурье [7], полагаем, что в задаче теории упругости сохраняется статическая постановка, т.е. пренебрегаем изменениями напряженного состояния во времени, вызванными нестационарностью температурного поля (температура удовлетворяет Фурье). Поэтому температуру можно рассматривать как неварьируемый внешний фактор при варьировании напряженного

состояния. Задача теплопроводности решается независимо от задачи теории упругости.

В случае второй краевой задачи имеем

$$\mathbf{n} \cdot \hat{T}|_O = \mathbf{F}, \quad (1)$$

где \hat{T} – тензор напряжений; \mathbf{F} – вектор поверхностной силы; \mathbf{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности тела. (Обозначения соответствуют принятым в работе [7].)

Краевую задачу термоупругости можно сопоставить с эквивалентной задачей вариационного исчисления. Запишем функционал, из условия стационарности которого в качестве уравнений Эйлера вытекают бы дифференциальные уравнения температурной задачи теории упругости в напряжениях (уравнение статики и условие совместности).

Рассмотрим функционал J над тензором напряжений \hat{T} и над вектором перемещения \mathbf{u} как над независимыми величинами:

$$J = \int_V \int \int (\hat{T} \cdot \cdot \text{def } \mathbf{u} - G) d\tau - \int_V \int \int \rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} d\tau - \int_O \int \mathbf{F} \cdot \mathbf{u} do, \quad (2)$$

где G – потенциал Гиббса; \mathbf{K} – вектор массовой силы, отнесенной к единице массы среды; ρ – плотность. Согласно [7] имеем

$$G = A(\sigma) + \alpha\theta\sigma + 3\alpha^2\theta^2\mu \frac{1+\nu}{1-2\nu} + \int_{\Theta_0}^{\Theta} \frac{c(\xi)}{\xi} (\theta - \xi) d\xi; \quad (3)$$

$$A(\sigma) = \frac{1}{4\mu} \left[I_1(\hat{T}^2) - \frac{\nu}{1+\nu} I_1^2(\hat{T}) \right]; \quad (4)$$

$$\text{def } \mathbf{u} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^* + \nabla \mathbf{u}], \quad \Theta = \Theta_0 + \theta, \quad (5)$$

где $A(\sigma)$ – удельная потенциальная энергия деформации как функция компонент тензора напряжений; μ – постоянная Ламе; ν – коэффициент Пуассона; $I_1(\hat{T})$ – первый инвариант тензора напряжений; $\sigma = I_1(\hat{T})$; θ – температура, отсчитываемая от температуры натурального состояния, т.е. состояния, в котором среда не напряжена; Θ_0 – абсолютная температура в натуральном состоянии тела; Θ – абсолютная температура; c – теплоемкость при постоянном объеме; α – коэффициент линейного расширения.

Свойство стационарности функционала J в положении равновесия линейно-упругого тела запишем в виде

$$\delta J = 0. \quad (6)$$

Используя (2), (6) получаем

$$\int_V \int_V \int_V [\delta(\hat{T} \cdot \text{def } \mathbf{u}) - \delta G] d\tau - \int_V \int_V \delta(\rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}) d\tau - \int_O \delta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) do. \quad (7)$$

В объеме V

$$\delta \rho \mathbf{K} = 0, \quad \delta(\rho \mathbf{K} \cdot \mathbf{u}) = \rho \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{u}, \quad (8)$$

на поверхности O

$$\delta \mathbf{F} = 0, \quad \delta(\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}) = \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u}. \quad (9)$$

С учетом (8), (9) уравнение (7) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_V \int_V \int_V [(\delta \hat{T} \cdot \text{def } \mathbf{u}) + (\hat{T} \cdot \text{def } \delta \mathbf{u}) - \delta G] d\tau - \\ & - \int_V \int_V \int_V \rho \mathbf{K} \cdot \delta \mathbf{u} d\tau - \int_O \int \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} do = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Поскольку $\hat{T} = \hat{T}^*$, будет справедливым соотношение

$$\hat{T} \cdot \text{def } \delta \mathbf{u} = \text{div}(\hat{T} \cdot \delta \mathbf{u}) - \delta \mathbf{u} \cdot \text{div} \hat{T}. \quad (11)$$

Далее имеем

$$\delta G = \delta A + \alpha \theta \delta I_1(\hat{T}). \quad (12)$$

Можно показать, что

$$\delta A(\delta) = \frac{1}{2\mu} \left[\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} I_1(\hat{T}) \hat{E} \right] \cdot \delta \hat{T}; \quad \delta I_1(\hat{T}) = \hat{E} \cdot \delta \hat{T}, \quad (13)$$

где \hat{E} – единичный тензор.

На основании (10)–(13) запишем

$$\begin{aligned} & \int_V \int_V \int_V \left\{ \text{def } \mathbf{u} - \frac{1}{2\mu} \left[\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \hat{E} I_1(\hat{T}) \right] - \alpha \theta \hat{E} \right\} \cdot \delta \hat{T} d\tau - \\ & - \int_V \int_V (\text{div} \hat{T} + \rho \mathbf{K}) \cdot \delta \mathbf{u} d\tau + \int_O \int (\mathbf{n} \cdot \hat{T} - \mathbf{F}) \cdot \delta \mathbf{u} do = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

При получении (14) было также использовано известное соотношение

$$\int_V \int_V \text{div}(\hat{T} \cdot \delta \mathbf{u}) d\tau = \int_O \int \mathbf{n} \cdot \hat{T} \cdot \delta \mathbf{u} do.$$

Из (14) вследствие произвольности вариаций $\delta\hat{T}$, $\delta\mathbf{u}$ в объеме V и $\delta\mathbf{u}$ на поверхности O имеем уравнения в объеме V

$$\operatorname{div} \hat{T} + \rho \mathbf{K} = 0; \quad (15)$$

$$\operatorname{def} \mathbf{u} = \frac{1}{2\mu} \left[\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} \hat{E} I_1(\hat{T}) \right] + \alpha \theta \hat{E} \quad (16)$$

и краевое условие

$$\mathbf{n} \cdot \hat{T}|_O = \mathbf{F}. \quad (17)$$

Уравнение (15) является дифференциальным уравнением равновесия (уравнение статики). Выражение (16) можно представить следующим образом:

$$\operatorname{Ink} \left\{ \left[\hat{T} - \frac{\nu}{1+\nu} I_1(\hat{T}) \hat{E} \right] + 2\mu\alpha\theta\hat{E} \right\} = 0, \quad (18)$$

где

$$\operatorname{Ink} \hat{Q} = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \hat{Q})^*.$$

Выражение (18) – условие совместности в напряжениях. Используя (15), условие совместности (18) можно представить и в таком виде:

$$\nabla^2 \hat{T} + \frac{1}{1+\nu} \nabla \nabla \sigma + 2\rho \operatorname{def} \mathbf{K} + E \frac{\nu}{1-\nu} \rho \operatorname{div} \mathbf{K} + 2\mu\alpha \left(\nabla \nabla \theta + \frac{1+\nu}{1-\nu} \hat{E} \nabla^2 \theta \right) = 0. \quad (19)$$

Таким образом, из условия стационарности функционала (2) в качестве уравнений Эйлера получены уравнение статики (15) и условие совместности (18), а в качестве натурального краевого условия – статическое краевое условие (17).

Выше рассмотрен случай второй (статической) краевой задачи. Не представляет принципиальных затруднений распространение полученных результатов и на другие типы краевых задач термоупругости.

В том частном случае, когда температурные слагаемые не учитываются, в функционал (2) вместо потенциала Гиббса G следует подставить удельную потенциальную энергию деформации $A(\sigma)$.

Резюме

При розрахунках деталей та елементів конструкцій на міцність часто використовується варіаційне формулювання задачі. Пропонується варіаційний принцип, рівняннями Ейлера якого є диференціальні рівняння термопружності в напруженнях.

1. *Майзель В. М.* Температурная задача теории упругости. – Киев: Изд-во АН УССР, 1951. – 152 с.
2. *Herrmann G.* On variational principles in thermoelasticity and heat conduction // *Quart. Appl. Math.* – 1963. – **21**. – P. 151 – 155.
3. *Parkus H.* Variational principles in thermo and magnetoelasticity // *Courses and lectures*, No. 58. – Springer-Verlag: Wien, New York, 1972. – 47 p.
4. *Kratzig W. B. and Waltersdorf K. P.* On thermodynamics of deformation and variational methods in reversible thermoelasticity // *Variational methods in engineering* / Eds. C. A. Brebbia and H. Tottenham. – Southampton University Press. – 1975. – Vol. 1. – P. 43 – 56.
5. *Балабух Л. И., Шаповалов Л. А.* О вариационных уравнениях термоупругости // *Прикл. математика и механика.* – 1960. – **24**, вып. 4. – С. 703 – 707.
6. *Boley B. A. and Weiner J. H.* Theory of Thermal Stresses. – New York, London: John Wiley, 1960. – 517 p.
7. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.

Поступила 30. 10. 2000

ХРОНИКА, ИНФОРМАЦИЯ, РЕКЛАМА

Оценка термоциклического нагружения в узле приварки “горячего” коллектора к патрубку парогенератора ПГВ-1000

Г. В. Степанов^а, В. В. Харченко^а, А. И. Бабуцкий^а, О. Я. Зинченко^б,
Н. А. Феофентов^в, С. В. Романов^г

^а Институт проблем прочности НАН Украины, Киев, Украина

^б Национальная атомная энергогенерирующая компания “Энергоатом”, Киев, Украина

^в Обособленное подразделение “Южно-Украинская АЭС”, Южноукраинск, Украина

^г Ассоциация “Надежность машин и сооружений”, Киев, Украина

Безопасная эксплуатация атомных энергетических установок невозможна без обеспечения прочности их оборудования и трубопроводов с учетом реальных условий нагружения. В связи с этим понятен интерес специалистов в области прочности материалов к каждому случаю возникновения повреждений типа трещин в элементах оборудования.

В узле приварки “горячего” коллектора к патрубку парогенератора ПГВ-1000 АЭС с реактором ВВЭР-1000 обнаружены трещины при эксплуатации в пределах расчетного срока службы. По результатам проведенных исследований причина возникновения повреждений не выяснена. Тот факт, что все обнаруженные повреждения (трещины) были локализованы практически в одном и том же месте на узлах приварки “горячего” коллектора теплоносителя к патрубку свидетельствует в данном случае о наличии общего фактора нагружения, действующего в узле и не учитываемого ранее в прочностных расчетах.

Узел приварки “горячего” коллектора к патрубку парогенератора (рис. 1) является одним из наиболее нагруженных. При выполнении прочностных расчетов узла его нагружение принимается статическим (повторно-статическим), и к главным составляющим нагрузки относят давление в первом и втором контурах, а также усилия, действующие со стороны главного циркуляционного трубопровода.

Анализ технической, конструкторской и эксплуатационной документации, а также численные расчеты напряженно-деформированного состояния узла приварки позволили выявить дополнительное термоциклическое нагружение, которое может быть ответственным за возникновение и прорастание обнаруженных трещин, поскольку отсутствие финишной обработки внутренней поверхности сварного шва узла не обеспечивает его работу при циклическом нагружении.

Некоторые результаты расчетов термоциклического нагружения в области сварного шва приведены ниже.

© Г. В. СТЕПАНОВ, В. В. ХАРЧЕНКО, А. И. БАБУЦКИЙ, О. Я. ЗИНЧЕНКО, Н. А. ФЕОФЕНТОВ, С. В. РОМАНОВ, 2002

Расчетная модель учитывает, что элементы узла приварки прогреваются неравномерно (температура теплоносителя в первом контуре составляет 320°C , температура среды во втором контуре – 272°C). В результате градиента температур в узле возникают термонапряжения.

Указанная ситуация осложняется тем, что в силу конструктивных особенностей данного узла в его кармане (кольцевом зазоре между коллектором и патрубком парогенератора – рис. 1) в процессе эксплуатации накапливаются продукты коррозии с увеличенной концентрацией коррозионно-активных элементов, в частности меди. Для их выведения применяется периодическая продувка водой несколько раз в сутки. В результате такой продувки водой, температура которой ниже температуры теплоносителя в первом контуре, возникает режим термоциклирования на поверхности кармана. Интенсивность термоциклирования зависит в первую очередь от разности температуры теплоносителя в первом контуре и продувочной воды.

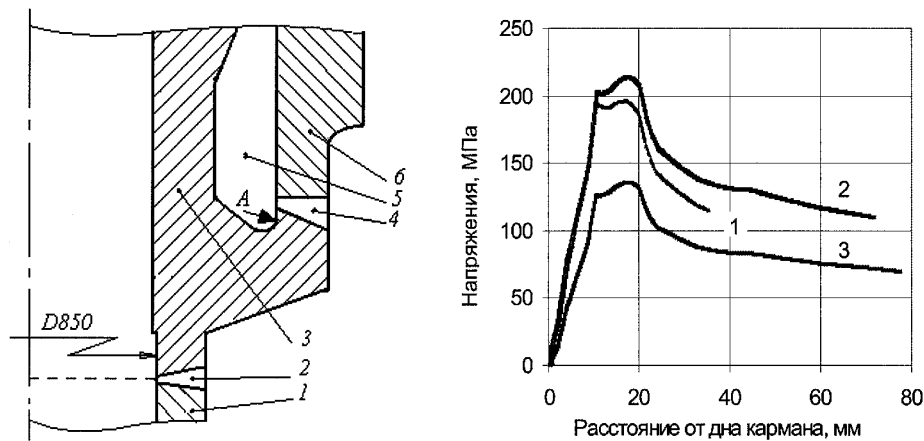


Рис. 1. Узел приварки: 1 – главный циркуляционный трубопровод; 2, 4 – сварной шов; 3 – коллектор; 5 – карман; 6 – патрубок парогенератора; А – место инициирования разрушения.

Рис. 2. Напряжения в направлении оси патрубка на его внутренней стенке при нагружении рабочим давлением без учета влияния температуры (1) и с учетом: “карман холодный” (2) и “карман горячий” (3).

Результаты расчета напряженно-деформированного состояния узла приварки с учетом вышеизложенного приведены на рис. 2. Расчет выполняли методом конечных элементов в осесимметричной постановке, решая связанную термоупругую задачу. Рассматривали следующие варианты нагружения: только давлением без учета влияния температуры и давлением с учетом разности температур теплоносителя и продувочной воды. При этом принимали, что давление в первом и втором контурах составляет соответственно 16 и 6 МПа, разность температур равна 40°C (на практике она может быть выше). Режим “карман горячий” соответствует предполагаемому состоянию между продувками, режим “карман холодный” – состоянию во время продувки.

Из результатов расчетов видно, что внутренняя стенка патрубка работающего парогенератора в области галтельного перехода (место инициирования разрушения) во время продувки испытывает растяжение, и уровень

возникающих напряжений в направлении оси вращения патрубка достигает 214 МПа. В период между продувками температура в кармане повышается, вызывая снижение общего уровня напряжений. Максимальная расчетная амплитуда изменения напряжения в области галтельного перехода узла приварки коллектора к патрубку парогенератора в результате периодических продувок кармана составляет 78 МПа. Следует учитывать, что галтельный переход находится в непосредственной близости от сварного шва, который не подвергается финишной обработке со стороны кармана и может иметь дефекты сварки в виде непроваров, раковин и т.п., а на самом галтельном переходе наблюдаются подрезы от грубой механической обработки. Вследствие концентрации напряжений в области таких дефектов значения напряжений могут превышать предел текучести, что в условиях действия циклических нагрузок от периодических продувок может приводить к зарождению и распространению усталостных трещин.

Таким образом, результаты расчетов свидетельствуют о необходимости учета термоциклического нагружения при оценке работоспособности узла приварки “горячего” коллектора к патрубку парогенератора.

Abstracts

Margolin B. Z., Shvetsova V. A., Gulenko A. G., Il'in A. V., Nikolaev V. A., and Smirnov V. I. **Prediction of Fracture Toughness of Reactor Pressure-Vessel Steels on the Basis of the "Master Curve" Approach and the Probabilistic Model** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 5 – 21.

On the basis of a probabilistic model and "Master Curve" approach we perform prediction of the brittle fracture-toughness temperature dependence of 15Kh2NMFA reactor pressure-vessel steel in the initial and high-embrittled states. Calculations of the $K_{Ic}(T)$ curve have been carried out using these approaches on the basis of the results of fracture toughness testing of precracked Charpy specimens at some (single) temperature. The $K_{Ic}(T)$ curves for the initial state calculated with the Master Curve approach and the probabilistic model are compared and their good agreement is shown. Experimental values of the fracture toughness have been obtained for the embrittled 15Kh2NMFA steel through testing compact-tension 2T-CT specimens over a wide temperature range. We compared the calculated $K_{Ic}(T)$ curves for the embrittled steel with the corresponding test results. It is shown that the $K_{Ic}(T)$ curve for the embrittled steel calculated in accordance with the Master curve approach does not describe the experimental data adequately. At the same time, the agreement of the experimental data on fracture toughness and the $K_{Ic}(T)$ curves calculated by the probabilistic model is good.

Orynyak I. V. and Gienko A. Yu. **An Elliptic Mode-I Crack in an Infinite Body. Part 1. Crack Opening Displacement under the Polynomial Law of Loading** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 22 – 40.

We consider an internal elliptic Mode-I crack in an infinite elastic body. We modify the procedure for the determination of the weight function and stress intensity factor, which was described earlier. Analytical and calculated values of the stress intensity factor along the crack front have been obtained for various cases of the polynomial law of loading. An approach has been proposed to the determination of the crack opening displacement field (CODF) from values of the stress intensity factor using the energy balance equation of Rice, Dyson's theo-

rem, and the theory of crack translation in an inhomogeneous stress field. We obtained a closed expression for an elliptical CODF under the polynomial law of loading of any degree that can be used when solving three-dimensional problems of the elasticity theory with cracks.

Ballesteros A., Strizhalo V. A., Grinik Ĭ. U., Novogrudskii L. S., Chirko L. I., and Zemtsov M. P. **Determination of Reference Temperature T_0 for Steel JRQ in an Unirradiated State and Construction of Master Curve** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 41 – 51.

The paper considers the results of testing reactor steel JRQ involving determination of the crack-growth resistance and the reference temperature T_0 , construction of Master Curve, and evaluation of the boundaries of the regions with different failure probability. The tests were conducted on small specimens (1/2T) made from blocks of steel JRQ supplied by the IAEA within the framework of the Round Robin program.

Bovsunovskii A. P. and Matveev V. V. **Dynamic Characteristics of a Fatigue Crack in Bar Elements of Structures** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 52 – 70.

We analyze free vibrations of a linear cantilever beam with an edge closing crack. A crack is modeled by an elastic hinge whose compliance is considered to be finite and is determined from the criterion of energy equivalence. An algorithm is constructed for sequential calculation of eigenforms for each of the limited number of vibration cycles of a beam. Based on this algorithm, it is shown that at the moments of crack opening and closing new vibration modes are generated, which differ from the starting preset mode, and the regularities in their generation are studied. We performed analysis of sensitivity of dynamic characteristics of damage, which are based on the evaluation of nonlinear distortions of displacement, acceleration, and deformation waveforms for a beam of various cross sections with a closing crack.

Dolgov N. A. and Lyashenko B. A. **Effect of the Poisson Ratio on the Ultimate Stress State of a Coating** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 71 – 77.

We present relations for calculating equivalent stresses in a coating. We plot equivalent stresses versus the difference between Poisson's ratio of a substrate and a coating. The values of the maximum normal and equivalent stresses for various coatings are shown to be described well by the calculated dependences. Analysis of the results obtained points to the necessity of taking into account the effect of the Poisson ratio on equivalent stresses and correspondingly on the ultimate stress state in a coating. This feature of the "substrate-coating" system should be allowed for in the course of strength analysis of structural elements with coatings, and in the experimental calculation of cohesion strength during laboratory tests. When designing structural elements with coatings one should try to obtain such a combination of elastic properties of the substrate and the coating, which provides the minimum value of equivalent stresses in the coating.

Romashchenko V. A. and Storozhuk V. N. **Analytical Calculation of Severe Deformation of Initially Elliptical Plates** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 78 – 87.

With the use of an energy-based approach, we obtained an analytical solution to the problem of elliptical and round plates fixed along the contour and statically loaded by uniform pressure for the case of large deflection. The calculated results are compared with available experimental data.

Pinyak I. S. **Micro- and Macrorates of Fatigue Crack Propagation in Steels and Alloys under the Influence of Crack Closure** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 88 – 101.

On the basis of experimental results, we demonstrate that the disagreement of the macro- and microrates of fatigue crack propagation in the second portion of the fatigue-crack growth diagram is due to crack closure within the region of its presence. Relationships between macro- and microrates of fatigue crack propagation and the material structure within the second portion of the curve under various load ratios have been established with account for the influence of crack closure. A procedure is proposed for the expertise of fracture of structural materials according to micro- and macrorates of fatigue crack propagation.

Galiev Sh. U. and Panova O. P. **Localization of Resonant Spherical Waves** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 102 – 111.

This paper treats radial spherical resonant waves excited in the transresonant regime. An approximate general solution of a perturbed-wave equation is presented here, which takes into account nonlinear, spatial, and dissipative effects. Then a boundary problem reduces to the perturbed compound Burgers–Korteweg–de Vries equation (BKdV) in time. Several solutions to this equation are constructed. Shock waves may be excited near resonance according to the solutions for an inviscid medium. However, both viscosity and spatial dispersion begin to be important very close to resonance and prevent the formation of shock discontinuity. As a result, periodic localized excitations are generated in resonators instead of shock waves.

Gofman M. N. and Kosmodamianskii A. S. **To the Problem of Determination of the Stress State of a Ring-Shaped Orthotropic Plate** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 112 – 120.

A method is proposed for solving a plane problem for thin orthotropic plates using the method of decomposition by a parameter. The solution of the corresponding isotropic problem serves as a zero approximation. A good coincidence of the results obtained by the method proposed with the available solution for an infinite plate with a hole is shown for specific materials. The stress state of a ring-shaped orthotropic plate has been studied and the relations for stress distribution are presented. A comparison has been made with a similar isotropic plate.

Safronov A. V. and Safronov V. A. **Iteration Method for the Evaluation of the Critical Rate of Airfoil Flutter in a Non-Stationary Flow** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 121 – 129.

A method is proposed that makes it possible to evaluate the critical rate of flutter of airfoils at an early stage of designing within three to four iterations using the theory of a wing in a non-stationary flow and to create airframes with optimal weight characteristics.

Ulitin G. M. **Stability of a Drill Column of a Rotary-Type Drilling Rig** // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 130 – 135.

On the basis of the equation of bending of a ponderable rod, we studied a problem on stability of a rotary-type drill column. An equation for determining its critical length in the case of

tension–compression was obtained. The critical length was calculated as a function of tension of the pulley-block system for a drilling rig “WIRTH”

Golubev V. K. and Medvedkin V. A. On Dynamic Cutting of Warhead Fairing Shells Made of AMg6 Aluminum Alloy // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 136 – 140.

Dependence of cutting length of 9E-1028 warhead fairing shells 1.0 mm-thick made of AMg6 aluminum alloy on initial velocity of a massive knife sped up explosively has been derived experimentally. On the basis of the experimental data obtained the force of cutting

resistance has been determined. The average stress on the cutting surface corresponding to this force is comparable to yield strength of AMg6 alloy.

Borodachev N. M. and Savchenko N. I. Variational Principle for the Temperature Problem of the Theory of Elasticity in Stresses // Problems of Strength. – 2002. – No. 1. – P. 141 – 145.

Strength calculation for parts and structural elements often involves a variational formulation of the problem. We propose the variational principle, wherein Euler equations are represented by differential equations of thermoelasticity in stresses.

Handbook of Mechanical Properties of Structural Materials at a Complex Stress State

Edited by Professor A. A. Lebedev
Academician of the National Academy of Sciences of Ukraine
Authors: A. A. Lebedev, B. I. Koval'chuk, F. F. Giginjak, and V. P. Lamashevsky

Severe stress conditions of present-day structures call for continuous refining of the methods of strength analysis and optimization of the technologies employed. The progress in creating rational structures and developing new efficient manufacturing processes depends primarily on the level of our knowledge of mechanical properties of the materials used.

However, previously published material contained only standard characteristics of the mechanical properties of materials obtained mainly in uniaxial tension and uniaxial compression, though it is known that in most cases the material of the carrying structural components works under conditions of a complex stress state. In view of the difficulties associated with the methods of testing under multiaxial loading, particularly under conditions of high and low temperatures, there has been a serious shortage of reliable data on the regularities of deformation and fracture of structural materials under a complex stress state.

The first Handbook containing extensive information on the influence of the stress state on the material properties was published in 1983. Since then a vast amount of research has been conducted on the mechanical properties of various structural materials under conditions of a complex stress state, including low- and high-temperature behavior. This new Handbook provides you with the results of the authors' own investigations and collection of data, and fills an important gap in the literature.

Contents

- **Strength criteria and methods of material testing under a complex stress state**
Parameters of the material stress-strain state; Limiting state criteria of materials; Methods for the experimental investigation of the mechanical properties of materials at a complex stress state
- **Deformation behavior, plasticity, and strength of materials under complex stress state**
A list of the investigated materials and their analogues; Summary index of the reference data; Carbon steels; Alloy steels and alloys; Aluminum and magnesium alloys; Titanium alloys; Other metals and alloys; Nonmetallic materials
- **References**

Begell House • c. 550pp • June 2000 • Normal price: \$125.00

ORDER FORM

YES! Please send me copies

Total Amount Payable

I enclose a check (drawn on a U.S. Bank) Please send my company or institution a proforma invoice

Please bill my credit card VISA Amex Mastercard Diners Club Discovery Card

Card No Expiry Date

Signature Name

Address

Town State Postcode ZIP

Country Telephone No

Fax No E-mail

**Please send your order to Begell House,
79 Madison Avenue, Suite 1205, New York, NY 10016-7802, USA
Fax: +1 (212) 2138368 ♦ Tel: +1 (212) 7251999 ♦ E-mail: orders@begellhouse.com**